Risque et calcul socioéconomique

P. Fery
Mars 2010

Sommaire

Avertissement : le formalisme mathématique utilisé vise à donner au lecteur une certaine intuition des concepts développés sans chercher toutefois à être parfaitement rigoureux. Les éléments exposés dans ce document n'engagent que l'auteur.

Dans la théorie économique classique, les individus sont maximisateurs d'une fonction d'utilité, disons u, dépendant de une ou plusieurs variables sur lesquelles ils ont un certain pouvoir de décision (quantité de travail fourni, temps de loisir, niveau de consommation, etc.). Notons x cette variable, x pouvant éventuellement prendre une forme vectorielle si l'on considère plusieurs variables, et supposons pour fixer les idées que x représente le niveau de consommation de l'individu. Le programme de chaque individu rationnel s'écrit :

$$\max_x u(x) \tag{1}$$

x pouvant éventuellement être soumis à des contraintes du type $f(x)=0$ ou $g(x)\leq 0$ (par exemple, si le niveau de consommation est borné par le revenu disponible).

Dans un contexte d'incertitude, c'est-à-dire lorsque la valeur de x n'est pas connue, est mal connue ou est connue avec une certaine probabilité, x est en réalité une variable aléatoire X affectée d'une loi de probabilité $F_X(x) = P(X \leq x)$ sur l'ensemble des valeurs possibles [1]. Par convention, on parlera de risque lorsque la loi de probabilité P est connue de manière objective, on parlera d'ambiguïté lorsque P est subjective (loi estimée par l'individu selon ses croyances, qu'il ait ou non de l'information sur la distribution objective et la nature de l'espace des probabilités) et d'incertitude dans les autres cas (loi inconnue et/ou espace de probabilité inconnu).

Le choix du niveau de consommation par l'individu est alors un choix entre différentes variables aléatoires X qui lui procureront un bien-être incertain. La théorie de von Neumann et Morgenstern (1944) établit que, sous certaines hypothèses relatives au comportement décisionnel de l'individu, son programme en environnement risqué est la maximisation de l'espérance d'utilité[2]

$$\max_X E(u(X)) = \max_X \int u(x) dP \tag{2}$$

La validité des hypothèses conduisant à ce modèle a donné lieu à de nombreux travaux sur l'axiomatique de la décision, que l'on ne détaillera pas ici (voir [3], pour une introduction). En effet, ce modèle a très vite été mis en défaut par les observations menées sur le comportement des individus face au risque, de sorte que toute une branche de la littérature scientifique explore depuis 60 ans les moyens et les conséquences de relâcher certains axiomes afin de décrire plus fidèlement les comportements observés. Le modèle de von Neumann et Morgenstern conserve toutefois un caractère normatif, lié d'une part à l'image de rationnalité idéale qu'il renvoie et d'autre part aux facilités de calcul qu'il offre[3].

1 Le modèle d'espérance d'utilité

En dépit de son caractère parfois peu réaliste, le modèle de von Neumann et Morgenstern (VNM) permet d'appréhender certains principes de la gestion du risque. Il explique notamment l'intérêt pour les individus de diversifier et de mutualiser les risques.

Pour fixer le cadre d'analyse, considérons un individu dont la fonction d'utilité est u et son niveau de richesse[4] C, auquel on propose une loterie de gain X avec loi de probabilité P. Le terme loterie désigne ici tout type de décision dont le résultat présente un certain niveau de

---

[1] On notera qu'il n'est supposé aucune incertitude sur la forme même de la fonction d'utilité u. On pourrait éventuellement raffiner le modèle en supposant que la fonction d'utilité est elle-même incertaine, par exemple en introduisant un paramètre λ aléatoire, définissant une classe de fonctions d'utilité possibles selon les différents états du monde : $X \mapsto u_\lambda(X) = u(\lambda, X)$. Toutefois, ce n'est pas l'objet de cette note.

[2] Plus précisément, von Neumann et Morgenstern ont établi que le comportement d'un individu vérifiant différents axiomes décisionnels simples est équivalent à l'existence d'une fonction d'utilité et d'une loi de probabilité (la probabilité utilisée par l'individu pour appréhender le risque) telles que la décision prise par l'individu corresponde au maximum d'espérance d'utilité.

[3] La grande force de ce modèle tient à son côté pratique pour la réflexion scientifique : la linéarité de l'opérateur d'espérance E permet de développer assez facilement divers calculs formels et d'obtenir de nombreux résultats sans recourir au calcul numérique.

[4] Par la suite, on assimile richesse et consommation et l'on n'utilisera plus que le seul terme richesse.

risque mais, pour l'illustration, on peut évidemment penser à un jeu de loterie standard. L'individu accepte la loterie si l'utilité qu'il espère en retirer est supérieure à l'utilité qu'il espère avoir s'il ne joue pas.

$$E(u(C+X)) \geq E(u(C)) \tag{3}$$

Toute la question des risques découle de l'évaluation de cette inéquation : est-ce que rajouter une certaine quantité X, dont la valeur est incertaine (et pourrait être négative !), à mon niveau de richesse C (éventuellement incertain[5]) améliorera mon bien-être ?

1.1 Notion d'équivalent certain

Pour résoudre le problème posé par l'inéquation (3), on introduit généralement - souvent sans le nommer - le concept d'équivalent certain. L'équivalent certain de la loterie de gain X est la somme que l'individu serait prêt à recevoir à coup sûr en échange de la loterie proposée. Il est indifférent pour lui de jouer à la loterie ou d'accepter son équivalent certain, que l'on notera R (comme rendement).

Mathématiquement, l'équivalent certain de X est donc défini par l'équation implicite $E(u(C+R)) = E(u(C+X))$ avec la propriété que, à la différence de X, R n'est pas une variable aléatoire mais une valeur unique. L'inéquation (3) devient alors $E(u(C+R)) \geq E(u(C))$.

Comme l'opérateur d'espérance E est linéaire, donc croissant, et que la fonction d'utilité u est par hypothèse croissante (*i.e.* le bien-être augmente quand la richesse augmente), la fonction composée $E(u(C+...))$ est une fonction croissante. Il s'en suit qu'une loterie de gain X vérifie l'inéquation (3), c'est-à-dire qu'elle est intéressante pour l'individu, si et seulement si son équivalent certain R est positif :

$$E(u(C+X)) \geq E(u(C)) \Leftrightarrow R \geq 0$$

Les sections suivantes montrent comment on peut calculer R sous certaines hypothèses et discutent les conséquences de ce calcul en matière de gestion du risque.

1.2 De l'intérêt de diversifier les risques

L'intérêt de diversifier les risques apparaît quand on cherche à calculer l'équivalent certain R au premier ordre par rapport à la variable risquée X.

Proposition 1 (développement du modèle VNM au 1^er^ ordre)

Si la fonction d'utilité u est suffisamment régulière et si le gain aléatoire X de la loterie est suffisamment petit (*i.e.* si le résultat de la loterie a un impact marginal sur le niveau C de richesse de l'individu), alors l'équivalent certain au premier ordre en X vaut approximativement

$$R \simeq \frac{E(X.u'(C))}{E(u'(C))} = E(X) + \frac{\operatorname{cov}(X, u'(C))}{E(u'(C))} \tag{4}$$

En outre, si l'incertitude sur la richesse C est faible (*i.e.* si l'intervalle de variation de C est petit

[5] Le niveau de richesse C peut lui-même être affecté d'un certain risque, par exemple du risque que le revenu disponible progresse moins vite que l'inflation, ce qui affecterait le pouvoir d'achat.

par rapport à l'espérance $E(C)=\overline{C}$), alors l'équivalent certain vaut approximativement

$$R \simeq E(X) - \gamma \frac{\mathrm{cov}(X,C)}{E(C)} \tag{5}$$

où l'on a posé $\gamma = -\overline{C}.u''(\overline{C})/u'(\overline{C})$, qui est appelé le coefficient relatif d'aversion au risque (coefficient d'Arrow-Pratt).

Justification de la proposition 1

La fonction u étant suffisamment régulière et X étant suffisamment petit devant C, on écrit le développement de Taylor au premier ordre par rapport à X :

$$\begin{aligned} E(u(C+X)) &\simeq E(u(C)+X.u'(C)) \\ &= E(u(C))+E(X.u'(C)) \\ &= E(u(C))+E(X).E(u'(C))+\mathrm{cov}(X,u'(C)) \end{aligned}$$

On ne le justifiera pas ici mais, si X est petit, l'équivalent certain R est également petit devant C de sorte que le développement limité vaut également pour $E(u(C+R))$. Par définition de R, en éliminant les termes identiques et sous l'hypothèse que $E(u'(C)) \neq 0$ (*i.e.* l'utilité marginale de la richesse n'est pas d'espérance nulle, ce qui revient à dire qu'un surcroît de richesse pourrait encore améliorer le bien-être), il vient :

$$\begin{aligned} E(u(C+R)) &= E(u(C+X)) \\ E(u(C))+R.E(u'(C))+0 &= E(u(C))+E(X).E(u'(C))+\mathrm{cov}(X,u'(C)) \\ R &= E(X)+\mathrm{cov}(X,u'(C))/E(u'(C)) \end{aligned}$$

Si l'incertitude sur la richesse C est faible par rapport au niveau moyen $E(C)=\overline{C}$, alors le développement de Taylor $u'(C) \simeq u'(\overline{C})+(C-\overline{C}).u''(\overline{C})$ est une bonne approximation de l'utilité marginale de la richesse, et l'on a

$$\begin{aligned} \mathrm{cov}(X,u'(C)) &\simeq \mathrm{cov}\left(X,u'(\overline{C})+(C-\overline{C}).u''(\overline{C})\right) \\ &= \mathrm{cov}(X,u'(\overline{C}))+\mathrm{cov}(X,C-\overline{C}).u''(\overline{C}) = 0+\mathrm{cov}(X,C).u''(\overline{C}) \\ E(u'(C)) &\simeq E\left(u'(\overline{C})+(C-\overline{C}).u''(\overline{C})\right) \\ &= u'(\overline{C})+E(C-\overline{C}).u''(\overline{C}) = u'(\overline{C})+0 \\ \frac{\mathrm{cov}(X,u'(C))}{E(u'(C))} &\simeq \frac{\mathrm{cov}(X,C).u''(\overline{C})}{u'(\overline{C})} = -\frac{-\overline{C}.u''(\overline{C})}{u'(\overline{C})}.\frac{\mathrm{cov}(X,C)}{\overline{C}} \end{aligned}$$

Sous les hypothèses standard pour u (utilité croissante : $u'>0$, et concave, c'est-à-dire à utilité marginale décroissante : $u''<0$), le coefficient $\gamma = -\overline{C}.u''(\overline{C})/u'(\overline{C})$ est positif.

□

La conséquence première de la proposition 1 est que, face au risque, on ne peut pas raisonner seulement en espérance. L'équivalent certain de X est en effet égal à l'espérance $E(X)$ corrigée d'un terme que l'on appelle ``la prime de risque''. Le critère d'acceptation de la loterie ($R \geq 0$) repose désormais sur l'examen de deux termes : le premier est le gain espéré de la loterie ($E(X)$) et le second est un terme de corrélation entre le gain de la loterie et l'utilité marginale de la richesse. Si l'utilité marginale de la richesse est appelée à diminuer (effet de satiété), une loterie gagnante présente moins d'intérêt que si l'utilité marginale de la richesse est appelée à augmenter (par exemple si l'on anticipe une chute du pouvoir d'achat).

Ce raisonnement est encore plus net si l'on analyse l'équation (5) : une décision engendrant des bénéfices lorsque la richesse est élevée (X et C positivement corrélés) vaut moins que les bénéfices moyens attendus ($R < E(X)$) ; à l'inverse, une décision engendrant des bénéfices en période de crise économique (X et C négativement corrélés) vaut plus que les bénéfices moyens attendus ($R > E(X)$). On investira donc de préférence dans les projets dont les bénéfices sont négativement corrélés au niveau de richesse, car ils agissent comme une assurance contre les coups du sort. C'est le principe même de la diversification des risques : disposer de plusieurs sources de revenus, certes risquées, mais dont les risques peuvent se ``compenser" du fait qu'ils sont corrélés négativement ou pas corrélés du tout.

1.2.1 Hypothèses sur le caractère marginal des risques envisagés

Par rapport à l'équation (4), l'équation (5) suppose une hypothèse supplémentaire, à savoir que le risque sur le niveau de richesse C est faible par rapport à l'espérance de cette richesse $\overline{C}$. Cette hypothèse, en général plausible pour la richesse de demain, peut ne pas être vérifiée si l'on s'intéresse à la richesse dans plusieurs années (l'incertitude croît avec l'horizon de temps). Dans un autre ordre d'idée, cette hypothèse ne serait pas valable pour un individu tirant par exemple tous ses revenus du jeu.

Le fait que l'équation (5) ne soit pas valable n'invalide pas pour autant le principe qu'il faut apprécier les risques en fonction de leur corrélation à la richesse disponible. Pour preuve, si le terme $C-\overline{C}$ n'est pas suffisamment petit devant l'espérance de richesse $\overline{C}$, le développement de Taylor peut être corrigé comme suit : $\exists \hat{C} \in [\overline{C};C] | u'(C) \simeq u'(\overline{C}) + (C-\overline{C}).u''(\hat{C})$. La difficulté provient alors du fait que $\hat{C}$ varie avec C, c'est-à-dire qu'il s'agit d'une variable stochastique, et les calculs d'espérance et de covariance s'en trouvent significativement compliqués. L'intuition conduisant au principe de diversification des risques reste toutefois la bonne.

L'avantage de l'équation (5), lorsqu'elle est valable, est de séparer dans le calcul de la prime de risque l'effet richesse traduit par la variable C et l'effet des préférences de l'individu (la fonction d'utilité u) traduit par le coefficient γ. Ces deux effets ont d'ailleurs un rôle opposé :

- d'une part, la prime de risque est d'autant plus faible que la richesse est grande (rôle amortisseur de la richesse) ; autrement dit, plus on est riche, moins on est sensible au risque externe - par risque externe, on entend ici le risque portant sur X qui est exogène au niveau de richesse du fait de l'hypothèse de marginalité. Si le risque de X avait un effet significatif (non marginal) sur le niveau de richesse C, la prime de risque serait bien plus importante.
- d'autre part, la prime de risque est d'autant plus grande que l'aversion relative[6] pour le risque γ est grande (rôle amplificateur des préférences individuelles) ; plus on craint le risque, plus on diminuera la valeur associée à une projet risqué.

Le lecteur observera que γ est exactement l'élasticité de l'utilité marginale u' par rapport au niveau moyen de la richesse $\overline{C}$. On retrouve donc ici l'hypothèse de marginalité du risque

---

[6]Par rapport au coefficient d'aversion absolue pour le risque, défini comme $-u''(\overline{C})/u'(\overline{C})$, le coefficient γ est qualifié de ``relatif" car il corrige la mesure de l'aversion au risque de l'effet richesse. Comme indiqué plus haut, sous les hypothèses standard, le coefficient γ est positif, c'est-à-dire que les gens sont en général averses au risque. Un individu neutre au risque aura un coefficient $\gamma = 0$ et un individu risquophile un coefficient $\gamma < 0$.

pesant sur C : le concept sous-jacent au coefficient γ est bien que l'on raisonne en petites variations par rapport à l'espérance de richesse. Il faut donc considérer ce coefficient d'aversion au risque pour ce qu'il est, une élasticité de l'utilité marginale, et non le prendre comme une donnée figée : un même individu peut avoir une aversion relative pour le risque différente selon son niveau de richesse (et donc, en particulier, différente au cours du temps).

Enfin et non des moindres, l'équation (4) repose elle-même sur une hypothèse forte de marginalité de X par rapport à C. On s'est bien gardé de définir précisément le sens de ``être suffisamment petit par rapport à'' car il s'agit d'une question délicate. En effet, cela peut signifier que l'espérance et l'écart-type de X sont petits par rapport à l'espérance de C[7]. Toutefois, dans la plupart des cas, cette définition ne suffit pas : l'espérance et l'écart-type indiquent où est centrée la loi de probabilité de X et si elle est plus ou moins évasée, mais ils ne renseignent aucunement sur la taille des queues de distribution (probabilités associées aux événements extrêmes de X). Pour être plus rigoureux, il faudrait reprendre tout le raisonnement de la proposition 1 en s'intéressant à l'épaisseur de ces queues de distribution. On montrerait alors que la variable aléatoire X doit vérifier une propriété du type : étant donné un petit seuil ε et un objectif de probabilité p_R, il existe un nombre $\alpha > 0$ et une probabilité $p_X \in [0;1]$ tels que

$$P(|X| \leq \alpha C) \geq p_X \Rightarrow P\left(\left|R - E(X) - \tfrac{cov(X,u'(C))}{E(u'(C))}\right| \leq \varepsilon\right) \geq p_R$$

Cela signifie que, si l'on veut que l'approximation de l'équivalent certain R soit bonne à ε près avec une probabilité supérieure à p_R (par exemple, dans au moins 95% des cas), alors il suffit que la variable aléatoire X reste bornée par αC avec une probabilité au moins égale à p_X. Autrement dit, si la probabilité que X prenne des valeurs extrêmes est suffisamment faible, alors la probabilité est élevée que l'équation (4) donne une bonne approximation de R.

La possibilité que X prenne des valeurs très éloignées de son espérance peut conduire à rendre non négligeable le risque rapporté à C. Dans ces cas-là, la formule approchée de l'équation (4) n'est plus valable et l'on préfèrera généralement des méthodes numériques (simulations de Monte-Carlo) pour apprécier le risque associé à X. Dans le cas où le risque serait à peine plus que marginal, on peut toujours développer le calcul de l'équivalent certain à un ordre supérieur en X (voir par exemple 1.3 pour le développement à l'ordre 2). Le développement limité à des ordres supérieurs à 1 peut d'ailleurs permettre de juger si l'approximation à l'ordre 1 est pertinente ou non, suivant l'ampleur des termes additionnels apportés par les ordres suivants.

1.2.2 Un exemple : le modèle d'évaluation des actifs financiers (MEDAF)

Le principe de diversification des risques se retrouve au niveau de la gestion des portefeuilles d'actifs financiers. La proposition 1 permet de retrouver le modèle d'évaluation des actifs financiers (MEDAF, ou CAPM en anglais, pour Capital Asset Pricing Model).

<u>Proposition 2 (MEDAF)</u>

Soit un marché financier sur lequel l'individu peut investir dans n produits financiers

[7]Cette définition est d'ailleurs exacte si la variable X suit une loi normale, puisque celle-ci est parfaitement connue à partir de ces deux paramètres : moyenne et écart-type.

risqués, dont les gains aléatoires sont $Y_1, Y_2, ..., Y_i, ..., Y_n$, et dans un actif financier sans risque, de gain certain R. Notons $Y_M = \sum_{i=1}^{n} q_i Y_i$ le gain moyen sur ce marché (les q_i représentent les poids relatifs des différents actifs dans la valorisation qui est faite de ce marché, $\sum_{i=1}^{n} q_i = 1$).

Si le marché est parfait, le rendement Y_i d'un actif i vérifie

$$E(Y_i) \simeq R + \beta_i \left(E(Y_M) - R\right) \tag{6}$$

où $\beta_i = \mathrm{cov}(Y_i, Y_M)/\mathrm{var}(Y_M)$ est appelé le ``béta" de l'actif i. Cette équation reste valable si, au lieu de raisonner sur les rendements des actifs, on raisonne sur les taux d'intérêt servis

$$E(r_i) \simeq r + \beta_i \left(E(r_M) - r\right) \tag{7}$$

où le coefficient β_i est identique au précédent et peut également être calculé en remplaçant les gains Y_i, Y_M par les taux d'intérêt r_i, r_M : $\beta_i = \mathrm{cov}(r_i, r_M)/\mathrm{var}(r_M)$.

<u>Justification de la proposition 2</u>

Un individu rationnel qui ne disposerait pas d'autres sources de revenus que ses placements financiers peut s'assurer un gain égal au gain moyen du marché. On considère donc que son niveau de richesse est donné par $C = Y_M$ (éventuellement à un facteur d'échelle près). S'il souhaite améliorer ses revenus, il examinera la possibilité d'augmenter au moins marginalement sa part d'un actif i en souscrivant à la ``loterie" $X = \varepsilon Y_i$ (avec $\varepsilon \ll 1$), ce qu'il fera si

$$E\left(u\left(Y_M + \varepsilon Y_i\right)\right) \geq E\left(u\left(Y_M\right)\right)$$

Une autre option possible serait d'investir ε dans l'actif sans risque, ce qui lui rapporterait εR. Par suite, l'individu est indifférent entre gagner εR ou gagner l'équivalent certain de son placement sur l'actif i, soit environ $E(\varepsilon Y_i) - \gamma \mathrm{cov}(\varepsilon Y_i, Y_M)/\overline{Y}_M$ (on laisse au lecteur le soin de vérifier que la proposition 1 est valable si ε est choisi assez petit et si l'on s'intéresse aux rendements à court terme de sorte que Y_M soit suffisamment peu différent de $\overline{Y}_M$).

Si le marché est parfait, donc en permanence à l'équilibre, on a ainsi pour tous les actifs $\varepsilon R \simeq E(\varepsilon Y_i) - \gamma \mathrm{cov}(\varepsilon Y_i, Y_M)/\overline{Y}_M$, ce qui peut se réécrire comme

$$E(Y_i) \simeq R + \gamma \mathrm{cov}(Y_i, Y_M)/\overline{Y}_M$$

Le raisonnement est aussi valable pour toute combinaison linéaire (*i.e.* tout portefeuille) des actifs Y_i, donc en particulier pour le gain moyen du marché Y_M. On a donc aussi l'équation $E(Y_M) - R \simeq \gamma \mathrm{cov}(Y_M, Y_M)/\overline{Y}_M = \gamma \mathrm{var}(Y_M)/\overline{Y}_M$. En éliminant entre les deux équations l'espérance de gain moyen du marché $\overline{Y}_M$, il vient la formule cherchée

$$E(Y_i) \simeq R + \frac{\gamma \mathrm{cov}(Y_i, Y_M)}{\gamma \mathrm{var}(Y_M)/\left(E(Y_M) - R\right)} = R + \beta_i \left(E(Y_M) - R\right)$$

où l'on a posé $\beta_i = \mathrm{cov}(Y_i, Y_M)/\mathrm{var}(Y_M)$.

Si l'on considère maintenant les taux d'intérêt servis, une somme S placée sur l'actif sans risque présente un rendement $R = S(1+r)$ et placée sur l'actif i un rendement $Y_i = S(1+r_i)$, où r et r_i sont les taux d'intérêt respectifs. La même somme placée en proportions q_i sur chacun des actifs du marché rapporterait le taux moyen du marché r_M défini par

$$S(1+r_M) = Y_M = \sum_{i=1}^{n} q_i Y_i = \sum_{i=1}^{n} q_i S(1+r_i) = S\left(\sum_{i=1}^{n} q_i + \sum_{i=1}^{n} q_i r_i\right) = S\left(1+\sum_{i=1}^{n} q_i r_i\right) \text{ d'où } r_M = \sum_{i=1}^{n} q_i r_i$$

On peut ainsi remplacer dans l'équation (6)

$$\begin{aligned} E(Y_i) &\simeq R + \beta_i (E(Y_M) - R) \\ E(S(1+r_i)) &\simeq S(1+r) + \beta_i (E(S(1+r_M)) - S(1+r)) \\ S + S.E(r_i) &\simeq S + S.r + \beta_i (S + S.E(r_M) - S - S.r) \\ E(r_i) &\simeq r + \beta_i (E(r_M) - r) \end{aligned}$$

et le ``béta" de l'actif i vaut

$$\beta_i = \frac{\operatorname{cov}(Y_i, Y_M)}{\operatorname{var}(Y_M)} = \frac{\operatorname{cov}(S(1+r_i), S(1+r_M))}{\operatorname{var}(S(1+r_M))} = \frac{S^2 \operatorname{cov}(1+r_i, 1+r_M)}{S^2 \operatorname{var}(1+r_M)} = \frac{\operatorname{cov}(r_i, r_M)}{\operatorname{var}(r_M)}$$

□

La proposition 2 revient à dire que, au premier ordre, la prime de risque d'un actif, $E(Y_i) - R$, est proportionnelle à la prime de risque moyenne sur le marché, $E(Y_M) - R$. Le coefficient de proportionnalité β_i dépend de la corrélation entre cet actif et le comportement moyen du marché.

Pour être plus précis, on peut observer que $\beta_i = \rho_{iM} . \sigma_i / \sigma_M$, où ρ_{iM} est le coefficient de corrélation entre l'actif et le comportement moyen du marché, et σ_i, σ_M sont les écarts-types respectivement de l'actif et de la moyenne du marché. On voit alors que la prime de risque d'un actif donné est proportionnelle à trois termes :

- la prime de risque du marché,
- la corrélation de l'actif avec le rendement moyen du marché,
- et le rapport existant entre la variabilité de cet actif et la variabilité du marché.

Un actif strictement corrélé au marché ($\rho_{iM} = 1$) aura une prime de risque d'autant plus élevée que sa variabilité intrinsèque σ_i est grande par rapport à celle du marché σ_M. Un actif faiblement corrélé au marché ($\rho_{iM} = \varepsilon$) verra sa prime de risque réduite en proportions.

Une conséquence de la proposition 2 est que, si un agent économique supporte un risque qui peut être revendu sur les marchés financiers, la prime de risque associée est donnée par l'équation (6). En effet, tout ``excédent" d'aversion au risque n'a pas lieu d'être puisque le risque est diversifiable par l'intermédiaire du marché. La valorisation du risque est donc celle observée sur le marché et elle ne dépend que de la prime de risque moyenne du marché. La prime de risque moyenne du marché représente, elle, l'ensemble des risques non diversifiables via le marché en question (ce qui ne veut pas dire que ces risques ne seraient pas diversifiables si l'on pouvait interconnecter ce marché avec d'autres).

La proposition 2 fait apparaître une caractéristique surprenante à première vue : dans le MEDAF, la prime de risque des actifs semble indépendante de la fonction d'utilité supposée des agents économiques. En effet, le coefficient d'aversion au risque γ a disparu au cours des calculs (on a d'ailleurs passé sous silence la possibilité que différents acteurs sur un même marché puissent avoir des aversions au risque différentes). Ce résultat vient du fait que, sans le dire, on a raisonné en faisant l'hypothèse d'un individu représentatif du comportement moyen des acteurs du marché. De fait, l'aversion au risque n'a pas disparu avec le coefficient γ : elle est implicitement présente dans la prime de risque moyenne du marché[8]. Autrement dit, le MEDAF repose sur l'hypothèse que le comportement moyen du marché traduit la fonction d'utilité moyenne des agents opérant sur le marché.

Ce résultat découle essentiellement de l'hypothèse que le marché est parfait. Notamment, les actifs financiers y sont supposés parfaitement liquides, c'est-à-dire qu'ils peuvent être échangés à tout instant, dans n'importe quelle quantité et sans coût de transaction entre deux agents qui y trouveraient un intérêt mutuel. Par ailleurs, l'hypothèse de marché parfait inclut aussi l'absence d'opportunité d'arbitrage, c'est-à-dire l'impossibilité de trouver une stratégie de gestion de portefeuille gagnante à coup sûr sans prendre aucun risque. C'est cette hypothèse qui va induire le principe ``d'équilibre" du marché garantissant que, à tout instant, l'équivalent certain d'un actif risqué sera égal au rendement de l'actif sans risque.

1.2.3 La notion de probabilite risque-neutre

Le calcul de l'équivalent certain de la loterie X fait apparaître deux termes, l'un $E(X)$ est l'espérance de la variable aléatoire et est indépendant de la fonction d'utilité de l'agent, le second est la prime de risque et dépend de la fonction d'utilité de l'agent. Faute de données empiriques sur les fonctions d'utilité individuelles, la prime de risque est souvent difficile à calculer. Idéalement, il serait beaucoup plus simple de n'avoir à calculer que le terme en espérance. C'est l'idée de la probabilité risque-neutre : transposer le problème du calcul de l'équivalent certain R dans un monde fictif, où il suffirait de calculer l'espérance de X.

Proposition 3 (probabilité risque-neutre)

Si l'incertitude sur les états possibles du monde est représentée par une loi de probabilité P (probabilité réelle), il existe une loi de probabilité Q, dite risque-neutre (probabilité fictive), telle que l'équivalent certain de la loterie X soit :

$$R \simeq \tilde{E}(X)$$

où $\tilde{E}$ désigne l'opérateur d'espérance sous la probabilité Q. En notant u la fonction d'utilité de l'individu et C sa richesse (C prend les valeurs c_θ dans les différents états θ du monde), la probabilité définie par $dQ_\theta = \frac{u'(c_\theta)}{E(u'(C))} dP_\theta$ pour chacun des états du monde θ est une probabilité risque-neutre satisfaisant cette propriété.

Justification de la proposition 3

Les calculs conduisant à la proposition 1 établissent l'égalité (approchée) suivante pour l'équivalent certain

$$R \simeq \frac{E(X.u'(C))}{E(u'(C))}$$

Si l'on revient à la forme intégrale de l'espérance, on a $E(X.u'(C)) = \int x_\theta.u'(c_\theta) dP_\theta$. Il suffit d'effectuer le changement de variable $dQ_\theta = \frac{u'(c_\theta)}{E(u'(C))} dP_\theta$ pour voir apparaître l'égalité $E(X.u'(C)) = E(u'(C)).\int x_\theta dQ_\theta = E(u'(C)).\tilde{E}(X)$, d'où découle le résultat. □

[8] Si tous les actifs du marché suivent des mouvements brownien géométriques, la prime de risque de marché vaut exactement $E(r_M) - r = \gamma.\sigma_M{}^2$ où γ est l'aversion relative pour le risque de l'agent représentatif moyen.

La proposition 3 permet de calculer simplement l'équivalent certain d'une loterie X dès lors que l'on sait calculer la probabilité risque-neutre. Inversement, connaissant la distribution des valeurs probables de X, on peut calculer simplement la probabilité risque-neutre : par définition, ce sera la probabilité sous laquelle le gain associé à X sera égal au rendement de l'actif sans risque (neutralité au risque). Par exemple, si la richesse est 100, le taux sans risque 2% et si X peut donner un gain de 8 ou une perte de 2 selon l'état du monde, on va chercher la probabilité risque-neutre $(q, 1-q)$ telle que :

$$q.(100+8)+(1-q).(100-2) = q.100.(1+2\%)+(1-q).100.(1+2\%)$$
$$10q+98=102$$
$$q = 0{,}4$$

On constate sur cet exemple que la probabilité risque-neutre n'est pas équilibrée entre les deux états du monde (on n'a pas $q = 1-q = 0{,}5$). Elle place moins de poids sur l'état favorable (gagner 8) que sur l'état défavorable (perdre 2) de manière à ce que le gain espéré de la loterie soit effectivement égal au gain sans risque (gagner 2, qui est la croissance certaine du niveau de richesse). La probabilité risque-neutre contient toute l'information sur la fonction d'utilité de l'individu : il est équivalent pour lui de parier avec les probabilités $q = 0{,}4$ et $1-q = 0{,}6$ sur les deux états du monde possible, ou de parier avec des probabilités égales ($0{,}5$) et de tenir compte d'une certaine aversion au risque.

1.3 De l'intérêt de mutualiser les risques

A l'inverse du problème précédent, dans lequel un agent économique est confronté à plusieurs risques (au minimum celui de la loterie proposée et celui portant sur sa propre richesse), le problème de mutualisation correspond au partage d'un risque entre plusieurs agents économiques. L'intérêt d'une telle répartition apparaît lorsqu'on développe au deuxième ordre le calcul de l'équivalent certain.

Proposition 4 (développement du modèle VNM au 2^{e} ordre)

Si la fonction d'utilité u est suffisamment régulière, si le gain aléatoire X de la loterie est suffisamment petit (*i.e.* si le résultat de la loterie a un impact marginal sur le niveau C de richesse de l'individu) et si l'incertitude sur la richesse C est faible (*i.e.* si l'intervalle de variation de C est petit par rapport à l'espérance $E(C)=\overline{C}$), alors l'équivalent certain au deuxième ordre en X vaut approximativement

$$R \simeq \left(E(X)-\frac{\gamma}{\overline{C}}\operatorname{cov}(X,C)\right)-\frac{\gamma}{2\overline{C}}\left(E(X^2)-\left(E(X)-\frac{\gamma}{\overline{C}}\operatorname{cov}(X,C)\right)^2\right) \qquad (8)$$

$$= E(X)-\frac{\gamma}{\overline{C}}\operatorname{cov}(X,C)-\frac{\gamma}{2\overline{C}}\operatorname{var}(X)-\frac{\gamma^2}{\overline{C}^2}E(X).\operatorname{cov}(X,C)+\frac{\gamma^3}{2\overline{C}^3}\left(\operatorname{cov}(X,C)\right)^2$$

En particulier, si la loterie ou l'actif risqué X n'est pas corrélé à la richesse C (*i.e.* $\operatorname{cov}(X,C)=0$), alors l'équivalent certain au deuxième ordre prend la forme très classique

$$R \simeq E(X)-\frac{\gamma}{2\overline{C}}\operatorname{var}(X) \qquad (9)$$

Justification de la proposition 4

Le développement limité de l'équation implicite définissant R, à savoir $E(u(C+R))=E(u(C+X))$, permet d'approcher la valeur de R aussi près que l'on veut si l'on pousse le calcul suffisamment loin. A l'ordre 2, on a d'une part $u(C+X)\simeq u(C)+X.u'(C)+\frac{X^2}{2}u''(C)$ et d'autre part $u(C+R)\simeq u(C)+R.u'(C)+\frac{R^2}{2}u''(C)$. Il s'en suit

$$E\left(u(C)+R.u'(C)+\tfrac{R^2}{2}u''(C)\right)\simeq E\left(u(C)+X.u'(C)+\tfrac{X^2}{2}u''(C)\right)$$

$$E(u(C))+R.E(u'(C))+\tfrac{R^2}{2}E(u''(C))\simeq E(u(C))+E(X.u'(C))+\tfrac{1}{2}E\left(X^2.u''(C)\right)$$

$$R.E(u'(C))+\tfrac{R^2}{2}E(u''(C))\simeq E(u'(C))\left(E(X)+\tfrac{\operatorname{cov}(X,u'(C))}{E(u'(C))}\right)+\tfrac{1}{2}E(u''(C))\left(E\left(X^2\right)+\frac{\operatorname{cov}\left(X^2,u''(C)\right)}{E(u''(C))}\right)$$

$$R\simeq\left(E(X)+\tfrac{\operatorname{cov}(X,u'(C))}{E(u'(C))}\right)+\tfrac{E(u''(C))}{2E(u'(C))}\left(E\left(X^2\right)+\frac{\operatorname{cov}\left(X^2,u''(C)\right)}{E(u''(C))}-R^2\right)$$

On utilise ensuite les approximations suivantes

$$u'(C)\simeq u'(\overline{C})+(C-\overline{C}).u''(\overline{C})$$
$$u''(C)\simeq u''(\overline{C})$$
$$R^2\simeq\left(E(X)+\tfrac{\operatorname{cov}(X,u'(C))}{E(u'(C))}\right)^2$$

d'où découle le résultat

$$R\simeq\left(E(X)-\tfrac{\gamma}{\overline{C}}\operatorname{cov}(X,C)\right)-\tfrac{\gamma}{2\overline{C}}\left(E\left(X^2\right)-\left(E(X)-\tfrac{\gamma}{\overline{C}}\operatorname{cov}(X,C)\right)^2\right)$$

□

L'équation (8) montre que, au deuxième ordre, il faut corriger l'approximation du premier ordre par un terme mesurant l'écart entre les carrés $E\left(X^2\right)$ et R^2. On prend ainsi en compte non plus seulement l'espérance de la loterie mais aussi sa variabilité.

Dans la pratique, la seule forme couramment utilisée est l'équation (9) qui a une interprétation très intuitive : l'équivalent certain de l'actif risqué X est égal à l'espérance de X diminuée d'un terme proportionnel à sa variance. Plus l'actif est risqué, c'est-à-dire plus sa variance est grande, moins l'individu lui attache de valeur. Cette valeur diminue proportionnellement avec la variance et ce d'autant plus vite que l'aversion au risque γ est élevée. Toutefois, si la variance de l'actif demeure faible par rapport au niveau moyen de richesse *a priori* de l'individu ($var(X)\ll\overline{C}$), l'impact du risque sur son appréciation de la valeur de l'actif demeure faible. L'attitude des individus face au risque dépend donc de leur aversion relative pour le risque et de leur niveau de richesse.

Dans l'évaluation de leurs projets d'investissement, beaucoup d'entreprises évaluent les gains associés au projet avec une formule similaire

$$R\simeq E(X)-\frac{\operatorname{var}(X)}{2F}$$

où F est la part de fonds propres qu'elles investissent dans le projet, ce qui en soi est une mesure conjointe de leur richesse disponible et de leur aversion au risque. Par analogie avec l'équation (9), F peut être vu comme la mesure de la tolérance absolue de l'entreprise pour le risque, c'est-à-dire la part de richesse que les actionnaires sont disposés à perdre dans le cas le plus défavorable.

1.3.1 Le partage du risque collectif entre plusieurs individus

La prise en compte de la variance dans le calcul de l'équivalent certain montre comment la mise en commun d'un risque collectif permet d'en diminuer le coût individuel. On considère ici un groupe d'individus confronté à un choix collectif risqué rapportant X (par exemple, un projet d'investissement porté par un certain nombre d'actionnaires). Les n d'individus présentent chacun une fonction d'utilité $u_1, u_2, ..., u_i, ..., u_n$ et un niveau de richesse différents $C_1, C_2, ..., C_i, ..., C_n$.

Proposition 5

Si chaque individu porte une part égale du risque collectif X, selon la formule $X_i = X/n$, alors la prime de risque globale est divisée par le nombre n d'individus.

Justification de la proposition 5

Considérons le cas où le risque X est porté par un seul individu, que l'on suppose représentatif du groupe au sens où son aversion absolue pour le risque, notée $\overline{\gamma}/\overline{C}$, est égale à la moyenne de celles des n individus formant le groupe, c'est-à-dire $\frac{\overline{\gamma}}{\overline{C}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\gamma_i}{\overline{C}_i}$. Par l'équation (9), la prime de risque de cet individu vaut

$$E(X) - R = \frac{\overline{\gamma}}{2\overline{C}}\operatorname{var}(X)$$

Si maintenant le risque est réparti également entre les individus, chacun portera la prime de risque $E(X_i) - R_i = \frac{\gamma_i}{2\overline{C}_i}\operatorname{var}(X_i)$, si bien que la somme des primes de risques individuelles vaudra

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\gamma_i}{2\overline{C}_i}\operatorname{var}(X_i) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\gamma_i}{\overline{C}_i}\operatorname{var}\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{2}.\frac{n.\overline{\gamma}}{\overline{C}}.\frac{1}{n^2}\operatorname{var}(X) = \frac{1}{n}.\frac{\overline{\gamma}}{2\overline{C}}\operatorname{var}(X)$$

□

Lorsque le risque est réparti également entre n individus, tout se passe comme si la prime de risque était celle perçue par un individu représentatif moyen (au sens de l'aversion absolue au risque) avec une variance affectée d'un facteur $1/n$. A supposer que l'aversion absolue au risque soit sensiblement égale dans la population, la prime de risque du projet est donc d'autant plus faible que l'impact de celui-ci est réparti sur un grand nombre d'individus ($\operatorname{var}(X)/n$ décroît à mesure que la taille du groupe augmente). On aurait donc intérêt à partager le risque sur le plus grand nombre, via des mécanismes redistributifs (fiscalité, police d'assurance, etc.).

Si l'aversion absolue au risque est sensiblement inégale au sein de la population (par exemple parce que les niveaux de richesse sont très disparates), il n'est intéressant de faire adhérer un nouvel individu au projet que si son aversion absolue au risque est inférieure à $(2+1/n)$ fois la moyenne de celle des n individus qui participent déjà[9]. De là découlent les phénomènes de club tendant à fédérer les agents économiques selon leur degré d'aversion absolue au risque (et, partant, selon leur niveau de richesse).

[9]En effet, si $\frac{\gamma_{n+1}}{\overline{C}_{n+1}} \leq \left(2+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\gamma_i}{\overline{C}_i}$, alors

$$\frac{1}{(n+1)^2}\sum_{i=1}^{n+1}\frac{\gamma_i}{\overline{C}_i} = \frac{1}{(n+1)^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\gamma_i}{\overline{C}_i} + \frac{1}{(n+1)^2}\frac{\gamma_{n+1}}{\overline{C}_{n+1}} \leq \frac{n^2}{(n+1)^2}\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\gamma_i}{\overline{C}_i} + \frac{1}{(n+1)^2}\frac{2n+1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\gamma_i}{\overline{C}_i} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\gamma_i}{\overline{C}_i}.$$

Proposition 6 (partage optimal du risque collectif)

Si la collectivité porte un risque X, le partage optimal du risque entre les n d'individus conduit à transférer à chacun une part de risque proportionnelle à sa tolérance absolue pour le risque $T_i = \frac{\overline{C}_i}{\gamma_i}$. Si le partage du risque est optimal, le comportement moyen de la collectivité vis-à-vis du risque X correspond à celui d'un individu représentatif moyen dont la tolérance absolue au risque est la moyenne des tolérances individuelles au risque :

$$T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_i$$

Justification de la proposition 6

Notons q_i la fraction du risque collectif X attribuée à l'individu i (le risque porté par l'individu i est $X_i = q_i X$ et l'on a $\sum_{i=1}^{n} q_i = 1$). Le partage optimal du risque est celui qui minimise la somme des primes de risques individuelles

$$\min_{(q_1,\ldots,q_n)} \sum_{i=1}^{n} \frac{\gamma_i}{2\overline{C}_i} \operatorname{var}(q_i X), \text{ sous la contrainte } \sum_{i=1}^{n} q_i = 1$$

En notant λ le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte sur les q_i, le problème se réécrit

$$\min_{(q_1,\ldots,q_n)} \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\gamma_i}{2\overline{C}_i} q_i^2 \operatorname{var}(X) + \lambda \left(\sum_{i=1}^{n} q_i - 1 \right) \right]$$

et, pour chaque i, la condition d'optimalité au premier ordre vaut $\frac{\gamma_i}{\overline{C}_i} q_i \operatorname{var}(X) + \lambda = 0$, soit $q_i = -\lambda T_i / \operatorname{var}(X)$ où l'on a fait apparaître la tolérance absolue au risque T_i définie comme l'inverse de l'aversion absolue au risque $\gamma_i / \overline{C}_i$. A l'optimum, la part de risque portée par chaque individu est donc proportionnelle à sa tolérance absolue au risque (λ est unique et ne dépend pas de l'individu considéré).

La contrainte $\sum_{i=1}^{n} q_i = 1$ implique $-\frac{\lambda}{var(X)} \sum_{i=1}^{n} T_i = 1$, d'où $-\frac{\lambda}{var(X)} = \frac{1}{nT}$ et $q_i = \frac{T_i}{nT}$. Si la redistribution du risque est optimale, la prime de risque collective, définie comme la somme des primes de risque individuelles, vaut donc

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\gamma_i}{2\overline{C}_i} q_i^2 \operatorname{var}(X) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\gamma_i}{2\overline{C}_i} \left(\frac{T_i}{nT}\right)^2 \operatorname{var}(X) = \sum_{i=1}^{n} \frac{T_i}{2(nT)^2} \operatorname{var}(X) = \frac{\operatorname{var}(X)}{2nT}$$

La prime de risque collective est donc celle que prendraient n individus représentatifs moyens ayant chacun la tolérance moyenne au risque T.

□

A l'inverse de la proposition 5 qui montrait qu'en cas de partage égal du risque c'est l'aversion moyenne pour le risque qui compte pour décrire le comportement collectif, la proposition 6 montre qu'en cas de redistribution optimale du risque, c'est-à-dire proportionnellement à la tolérance au risque, c'est la tolérance moyenne pour le risque qui importe pour décrire le comportement de la collectivité. Ce constat, qui dépend étroitement de l'hypothèse d'optimalité du partage du risque, a des conséquences importantes.

Ainsi, si la collectivité comporte un sous-groupe d'individus neutres au risque (aversion absolue pour le risque nulle ou tolérance infinie au risque) et que leur niveau de richesse permet d'absorber l'intégralité du risque X, ce sont eux qui déterminent l'attitude collective face au risque : la prime de risque collective associée à X est nulle. Autrement dit, le risque considéré n'a pas de valeur pour la collectivité car il peut être absorbé par les individus les plus riches supposés infiniment tolérants au risque.

L'optimalité du partage du risque collectif pourrait théoriquement être assurée par un planificateur omniscient qui saurait définir exactement les quantités q_i à faire porter sur chaque individu. Toutefois, connaître la tolérance au risque de chaque individu (*i.e.* sa fonction d'utilité) est une tâche éminemment complexe en pratique. A l'inverse, les mécanismes de marché qui permettent aux individus d'échanger les biens, et donc les risques, en fonction de leur appétence respective pour le risque révèlent implicitement la tolérance de chacun pour le risque. En pratique, on fait donc l'hypothèse que le fonctionnement du marché est suffisamment proche de la perfection pour garantir l'hypothèse de répartition optimale des risques : le libre échange des risques entre les individus assure la répartition optimale, donc la couverture optimale du point de vue collectif. Cette hypothèse très généralement faite en finances[10] est pourtant largement discutable pour les actifs réels : malgré le développement des pratiques d'assurance et de ré-assurance, de nombreux risques ne peuvent être échangés sur un marché.

1.3.2 La mise en commun des risques au sein d'un groupe d'individus

A l'inverse du problème de partage du risque collectif, peut se poser le problème de mettre en commun des risques individuels. La prise en compte de la variance dans le calcul de l'équivalent certain permet d'expliquer l'intérêt de cette mutualisation. On reprend le cadre d'analyse précédent et l'on suppose cette fois que chacun des individus est confronté à un risque individuel X_i (par exemple, le risque d'une perte de revenu due à un arrêt de travail pour problème de santé), générant une prime de risque individuelle $\gamma_i/\left(2\overline{C}_i\right).\mathrm{var}(X_i)$.

<u>Proposition 7</u>

Si les risques individuels X_i sont mutualisés au niveau du groupe, alors il existe une clef de redistribution qui permet de réduire la prime de risque portée par chaque individu et, par suite, la prime de risque globale.

<u>Justification de la proposition 7</u>

La somme des primes de risque individuelles lorsque les risques ne sont pas mutualisés vaut

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\gamma_i}{2\overline{C}_i} \mathrm{var}(X_i)$$

Supposons que ces risques sont mutualisés sous la forme d'une caisse commune (type assurance maladie) supportant un risque $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ et que chaque individu en supporte une fraction $q_i X$ (avec $\sum_{i=1}^{n} q_i = 1$). La prime de risque pour l'individu i est désormais $\gamma_i/\left(2\overline{C}_i\right).q_i^2\,\mathrm{var}(X)$.

[10]La théorie de la finance classique repose sur trois hypothèses, liquidité des actifs, complétude des marchés et absence d'opportunités d'arbitrage, qui conduisent à supposer que les marchés financiers sont parfaits. Comme toute théorie, celle-ci est plus ou moins proche de la réalité.

Choisissons par exemple $q_i = \sqrt{\mathrm{var}(X_i)} / \sum_{j=1}^{n} \sqrt{\mathrm{var}(X_j)}$. Il est clair que $\sum_{i=1}^{n} q_i = 1$ de sorte que l'espérance de risque globale est inchangée : $\sum_{i=1}^{n} E(q_i X) = E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$. Avec ce choix de redistribution des risques, on réduit les primes de risques individuelles :

$$\frac{\gamma_i}{2\overline{C}_i} q_i^2 \mathrm{var}(X) = \frac{\gamma_i}{2\overline{C}_i} \frac{\mathrm{var}(X_i)}{\left(\sum_{j=1}^{n} \sqrt{\mathrm{var}(X_j)}\right)^2} . \mathrm{var}\left(\sum_{j=1}^{n} X_j\right) = \frac{\gamma_i}{2\overline{C}_i} \mathrm{var}(X_i) \frac{\sum_{j=1}^{n} \mathrm{var}(X_j) + 2 \sum_{j \neq k} \mathrm{cov}(X_j, X_k)}{\sum_{j=1}^{n} \mathrm{var}(X_j) + 2 \sum_{j \neq k} \sqrt{\mathrm{var}(X_j)} \sqrt{\mathrm{var}(X_k)}}$$

Or $\left|\mathrm{cov}(X_j, X_k)\right| \leq \sqrt{\mathrm{var}(X_j)} \sqrt{\mathrm{var}(X_k)}$, de sorte que l'on obtient un majorant de la prime de risque $\frac{\gamma_i}{2\overline{C}_i} q_i^2 \mathrm{var}(X) \leq \frac{\gamma_i}{2\overline{C}_i} \mathrm{var}(X_i)$. La prime de risque individuelle supportée dans le cas avec redistribution des risques est donc inférieure à la prime de risque individuelle supportée dans le cas sans redistribution.

□

La proposition 7 montre que la mutualisation des risques présente un intérêt pour la collectivité si l'on sait redistribuer judicieusement le risque global entre les individus. La somme des équivalents certains pour l'ensemble des individus participant à cette mutualisation du risque est alors supérieure à ce qu'elle serait sans mutualisation des risques

$$\sum_{i=1}^{n} \left(E(q_i X) - \frac{\gamma_i}{2\overline{C}_i} q_i^2 \mathrm{var}(X) \right) = E(X) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\gamma_i}{2\overline{C}_i} q_i^2 \mathrm{var}(X)$$

$$\geq$$

$$E(X) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\gamma_i}{2\overline{C}_i} \mathrm{var}(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \left(E(X_i) - \frac{\gamma_i}{2\overline{C}_i} \mathrm{var}(X_i) \right)$$

Toutefois, si la prime de risque est diminuée pour chacun des individus, il n'est pas certain que chacun retire en définitive un avantage à ce système. En effet, sans mutualisation des risques, l'individu i supporte un coût $E(X_i) - \gamma_i / (2\overline{C}_i) . \mathrm{var}(X_i)$ tandis que, dans le cas d'une mutualisation lui laissant une fraction q_i du risque collectif, il supporterait un coût $q_i E(X) - \gamma_i / (2\overline{C}_i) . q_i^2 \mathrm{var}(X)$. Le bilan de la mutualisation pour le groupe est effectivement positif mais pas nécessairement celui des individus auxquels on demanderait une contribution trop élevée, par exemple telle que $q_i \geq E(X_i)/E(X)$. En d'autres termes, si l'espérance du risque individuel est faible par rapport à la moyenne du groupe mais son écart-type élevé par rapport à l'écart-type moyen du groupe, l'individu n'a pas intérêt à mutualiser son risque au sein du groupe dès lors que la redistribution se fait sur la base de l'écart-type.

Tout l'enjeu des systèmes d'assurance et de mutuelle est de trouver un système de redistribution du risque qui soit aussi bénéfique que possible pour le groupe tout en restant avantageux pour chacun de ses membres. De là découlent les principes de calcul des cotisations individuelles incluant par exemple une franchise (lutte contre les comportements irresponsables des agents qui, se sachant assurés, ne prendraient pas les mesures nécessaires pour réduire leur risque individuel) et tenant compte, pour partie, du niveau de risque individuel (cotisation dépendant de l'âge, adhésion soumise à un bilan de santé), voire du niveau de richesse (cotisation indexée sur les revenus). Le développement de ces questions a été longuement étudiée par la théorie des problèmes principal-agent et les méthodes de résolution des cas d'aléa moral et d'antisélection.

1.4 La prise en compte du temps

L'incertitude existant sur le futur incite à considérer l'avenir comme risqué. L'aversion pour le risque (ce qui se passera dans le futur) induit une certaine préférence pour le présent, que l'on pourrait caricaturer par la maxime « Un ``tiens !'' vaut mieux que deux ``tu l'auras !'' ». La question centrale est alors : combien suis-je prêt à sacrifier aujourd'hui pour obtenir des bénéfices incertains (ou réduire des pertes probables) à une date future donnée ?

Le cadre formel de décision impose de définir une fonction d'utilité intertemporelle tenant compte de l'interaction possible entre ce qui se passe à différentes périodes. On considère ici le cas le plus simple, une fonction d'utilité séparable en temps, c'est-à-dire telle que l'utilité à l'instant t ne dépend que du niveau de richesse à cet instant et non des niveaux de richesse antérieurs (effet de regret) ou des niveaux de richesse futurs (effet d'anticipation).

1.4.1 Où l'on retrouve la notion de VAN

Considérons un agent économique dont la séquence temporelle de richesse est $C_0, C_1, ..., C_t, ...$ à chaque période et la fonction d'utilité u est invariante dans le temps. Cet agent est confronté à une décision risquée engendrant la séquence de flux $X_0, X_1, ..., X_t, ...$ à chaque période (par exemple, un investissement coûtant initialement X_0 et rapportant ensuite des bénéfices X_t pendant un certain temps).

Si l'on suppose qu'il existe, indépendamment de toute autre considération, une préférence pure pour le présent (représentée par un facteur d'actualisation temporelle $e^{-\delta t}$), alors l'espérance de la fonction d'utilité intertemporelle de l'agent s'écrit

$$E\left(\sum_{t\geq 0} e^{-\delta t} u(C_t + X_t)\right) \tag{10}$$

et le projet $X_{i=0,1,...,t,...}$ est intéressant si

$$E\left(\sum_{t\geq 0} e^{-\delta t} u(C_t + X_t)\right) \geq E\left(\sum_{t\geq 0} e^{-\delta t} u(C_t)\right) \tag{11}$$

Gollier ([4]) donne une discussion de cette inéquation et le développement des calculs conduisant à la réécrire, au prix de certaines hypothèses analogues à celles déjà énoncées plus haut, sous la forme standard d'une valeur actuelle nette (VAN) dont on étudie le signe. Il ne s'agit ni plus ni moins que de calculer l'équivalent certain du projet $X_{i=0,1,...,t,...}$. Pour donner un aperçu du raisonnement, posons $R_{i=0,1,...,t,...}$ la séquence des équivalents certains des X_t à chaque période. Par définition :

$$E\left(\sum_{t\geq 0} e^{-\delta t} u(C_t + R_t)\right) = E\left(\sum_{t\geq 0} e^{-\delta t} u(C_t + X_t)\right)$$

$$\sum_{t\geq 0} e^{-\delta t} E(u(C_t + R_t)) = \sum_{t\geq 0} e^{-\delta t} E(u(C_t + X_t))$$

$$\sum_{t\geq 0} e^{-\delta t} E(u(C_t)) + \sum_{t\geq 0} e^{-\delta t} E(u'(C_t)).R_t \simeq \sum_{t\geq 0} e^{-\delta t} E(u(C_t)) + \sum_{t\geq 0} e^{-\delta t} E(X_t.u'(C_t))$$

Si l'on simplifie des deux côtés et que l'on divise par $E(u'(C_0))$ (espérance de l'utilité marginale de la richesse initiale, supposée strictement positive), l'inéquation (11) devient

$$\sum_{t\geq 0} e^{-\delta t} \tfrac{E(u'(C_t))}{E(u'(C_0))}.R_t \simeq \sum_{t\geq 0} e^{-\delta t} \tfrac{E(u'(C_t))}{E(u'(C_0))}.\tfrac{E(X_t.u'(C_t))}{E(u'(C_t))} \geq 0 \qquad (12)$$

Cette inéquation est exactement le critère de positivité de la VAN du projet $X_{i=0,1,\ldots,t,\ldots}$. Si la VAN est positive, il convient d'entreprendre le projet ; sinon, il faut ne faut pas le faire. Pour les lecteurs qui ne seraient pas convaincus, en posant $\alpha_t = \delta - \frac{1}{t}\ln\left(\frac{E(u'(C_t))}{E(u'(C_0))}\right)$ et $\frac{E(X_t.u'(C_t))}{E(u'(C_t))} = E(X_t) - PX_t$, où PX_t est la prime de risque du projet pour l'année t, on retrouve la forme classique de la VAN :

$$\sum_{t\geq 0} e^{-\alpha_t t}.R_t \simeq \sum_{t\geq 0} e^{-\alpha_t t}\left(E(X_t) - PX_t\right) \geq 0$$

Dans cette VAN apparaissent clairement deux termes :

- d'une part, le facteur d'actualisation $e^{-\alpha_t t}$ qui est fonction de la préférence pure pour le présent δ et du taux d'accroissement de l'utilité marginale de la richesse ; α_t est le taux d'actualisation des flux économiques engendrés par le projet, et ce taux dépend du temps (il n'y a *a priori* aucune raison pour que ce taux soit constant, voir [5]) ;
- d'autre part, l'équivalent certain des flux économiques du projet R_t, qui est fonction de l'espérance des flux $E(X_t)$ et de la prime de risque PX_t.

On voit ainsi clairement que le facteur d'actualisation porte en lui l'incertitude sur la croissance du niveau de richesse (= risque systémique ou exogène au projet) et que le risque du projet (= risque spécifique ou endogène) est pris en compte séparément via une prime de risque variable au cours du temps.

La distinction établie ici entre les rôles du taux d'actualisation et de la prime de risque du projet est une distinction purement formelle. Rien n'empêcherait, pour des raisons pratiques, d'inclure également la prime de risque dans le taux auquel on actualise les bénéfices attendus du projet, par exemple ainsi (pratique courante des entreprises, qui actualise en utilisant le WACC[11]

[11] Weighted Average Cost of Capital = coût moyen pondéré du capital. La difficulté de cette pratique tient au fait que le WACC du projet est déterminé à partir de l'observation des marchés financiers et que la prime de risque qui en résulte ne correspond pas nécessairement à la prime de risque calculée sous la forme PX_t, notamment lorsque le projet comporte des externalités non valorisées dans les prix de marché. En outre, la plupart des entreprises

du projet) :

$$\sum_{t \geq 0} e^{-w_t t} E(X_t) \text{ avec } w_t = \alpha_t - \frac{1}{t} \ln\left(1 - \frac{PX_t}{E(X_t)}\right)$$

Inversement, rien n'empêcherait non plus de tenir compte de l'incertitude sur la croissance de la richesse via une prime de risque spécifique plutôt que de l'inclure dans le taux d'actualisation. Ce serait le cas si l'on calculait la VAN à partir de l'équation (12).

1.4.2 Calcul du taux d'actualisation

Une spécification courante pour l'utilité marginale de la richesse est $u'(c) = c^{-\gamma}$. Par ailleurs, il est courant de supposer que la richesse subit une croissance tendancielle μ et des chocs aléatoires d'ampleur σ à chaque période (les chocs sont modélisés comme un pré-mouvement brownien σB_t), ce qui s'écrit sous la forme[12] $C_t = C_0 e^{\mu t + \sigma B_t}$. Sous ces spécifications, on obtient une formule exacte pour le taux d'actualisation, qui est alors indépendant du temps :

$$\alpha_t = \delta - \frac{1}{t} \ln\left(\frac{E(u'(C_t))}{E(u'(C_0))}\right) = \delta + \gamma\mu - \frac{\gamma^2\sigma^2}{2} \qquad (13)$$

où δ est le taux de préférence pure pour le présent (éventuellement égal à 0 si l'on considère que le futur compte autant que le présent), $\gamma\mu$ traduit la décroissance de l'utilité marginale de la richesse (effet richesse : pourquoi investir aujourd'hui alors que l'on sera plus riche demain ?) et $\gamma^2\sigma^2/2$ traduit l'incertitude sur cette décroissance (effet précaution : il peut être intéressant d'investir aujourd'hui pour faire face à l'incertitude sur la richesse future).

Gollier ([4]) explique comment, si la croissance tendancielle μ présente une incertitude, le taux d'actualisation α doit varier au cours du temps et décroître à très long terme. On notera que c'est cette approche qui a présidé à la révision du taux d'actualisation par le Commissariat Général au Plan ([5]) et qui a conduit à la valeur numérique $\alpha = 4\%$ décroissante dans le temps.

Si l'interprétation de l'équation (13) est intellectuellement satisfaisante, son application présente des incohérences avec les observations réalisées sur les marchés économiques et financiers. En particulier, le taux d'actualisation auquel conduit la théorie est bien supérieur à celui qu'il devrait être si l'on se fondait sur les taux de marchés et le montant théorique des primes de risques est bien inférieur à celui exigé réellement par les investisseurs.

Pour illustrer la chose, considérons un projet sans risque (les financiers diront un actif

---

retiennent souvent un WACC constant sur la durée de vie du projet, alors qu'il n'y a aucune raison pour que la prime de risque soit constante dans le temps. Par exemple, une fois passé le risque de construction, la plupart des projets d'infrastructures ne sont plus soumis qu'à des risques de fonctionnement et de recettes, qui n'ont aucune raison d'être de la même forme et de la même ampleur que le risque de construction.

[12] Avec cette formulation, la variation infinitésimale de la richesse vaut $dC_t = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) C_t dt + \sigma C_t dB_t$ et l'on a $E(C_t) = E(C_0) e^{(\mu + \sigma^2/2)t}$ et $\mathrm{var}(C_t) = \mathrm{var}(C_0) e^{2(\mu + \sigma^2/2)t} e^{\sigma^2 t} + (E(C_0))^2 e^{2(\mu + \sigma^2/2)t} \left(e^{\sigma^2 t} - 1\right)$. Se reporter au calcul stochastique et, en particulier, à la formule d'Îto pour retrouver ces résultats.

sans risque). Sa valeur actuelle nette est égale à $\sum_{t\geq 0} e^{-\alpha t} R_t$, ce qui revient à dire que la rentabilité du projet (*i.e.* la croissance ``moyenne'' des bénéfices X_t) doit être supérieure ou égale au taux α auquel sont actualisés les bénéfices ($TRI \geq \alpha$). Compte tenu de la croissance de l'économie et du niveau d'aversion relatif au risque des agents économiques, le taux α donné par la théorie devrait être de l'ordre de 4% à 5% ($\delta \leq 1\%, \gamma \simeq 2$, $\mu \simeq 2\%$ et $\sigma \simeq 2\%$). Or, sur les marchés financiers, la rentabilité observée des actifs considérés comme sans risques (par exemple, les obligations émises par des Etats réputés fiables) se situe en général entre 1% et 2%[13]. Ce décalage, baptisé *equity premium puzzle*, est un vieux problème encore non résolu à ce jour bien que de nombreuses explications aient été avancées (voir [6]). Il fait partie des arguments à l'encontre du modèle d'espérance d'utilité.

1.5 Stratégies de décision face au risque

On vise ici à introduire deux aspects de la décision face au risque : tout d'abord, la notion d'option et l'idée qu'en présence d'incertitude sur le futur préserver une certaine flexibilité des choix peut avoir de la valeur et, dans un second temps, la notion d'allocation optimale des ressources sous contrainte budgétaire lorsque tant les bénéfices des projets que l'enveloppe budgétaire sont incertaines.

1.5.1 Maximiser l'espérance ou espérer le maximum ?

L'individu compare deux loteries X et Y sur la base de leurs équivalents certains $RX = E(X) - PX$ et $RY = E(Y) - PY$, où PX et PY sont les primes de risque qui peuvent être calculées comme indiqué précédemment. Formellement, l'individu résout le problème $\max(RX, RY)$ là où, en environnement certain, il aurait résolu le problème $\max(X, Y)$.

Supposons que l'individu confronté au choix entre les loteries (risquées) X et Y ait la possibilité de troquer son problème décisionnel $\max(RX, RY)$ contre le problème $\max(X, Y)$. En notant $Z = \max(X, Y)$, il en retirerait le gain certain

$$RZ = E(Z) - PZ \simeq E(\max(X, Y)) - \frac{\gamma}{C} \operatorname{cov}(\max(X, Y), C)$$

Ce cas peut se produire par exemple s'il est possible d'attendre une certaine information qui va rendre certains les gains des loteries X et Y. Au moment où l'individu choisi d'attendre cette information, Z est une variable aléatoire mais, lorsqu'il sera en possession de l'information, le choix se fera sur la base des valeurs sans risque et l'individu résoudra le problème sans risques $\max(X, Y)$.

Attendre l'information qui va supprimer l'incertitude présente donc une valeur si cela conduit à $\max(RX, RY) \leq RZ$. Dans le cas où l'individu n'aurait aucune aversion au risque (primes de risque nulle), l'information aurait donc une valeur dès que

$$\max(E(X), E(Y)) \leq E(\max(X, Y)) \tag{14}$$

[13] On raisonne ici en taux réel, c'est-à-dire hors inflation.

Or, il se trouve que l'inéquation (14) est toujours vérifiée[14]. Par continuité, on peut donc intuitivement comprendre que, si les primes de risques sont faibles, la même inéquation peut être vérifiée même lorsque le décideur présente une aversion non nulle pour le risque. Ainsi, plutôt que de choisir entre diverses loteries sur la base de leurs équivalents certains estimés *a priori*, le décideur peut avoir intérêt à décider ultérieurement une fois que toute incertitude sur les loteries aura disparu.

Le principe exposé ci-dessus repose, on l'aura compris, sur la perspective de réduire le risque par l'acquisition d'une information suffisante. Pour préciser ce concept, notons S_t le niveau d'information à disposition de l'individu au moment t où il prend sa décision. Initialement, il dispose du niveau d'information $S_0 = s_0$. S'il résout immédiatement le problème de choisir entre X et Y, il en retirera le bénéfice[15]

$$\max\left(E\left(u\left(C+X\right) \mid S_0 = s_0\right), E\left(u\left(C+Y\right) \mid S_0 = s_0\right)\right) \tag{15}$$

S'il choisit d'attendre d'avoir un niveau d'information futur S_t (S_t est inconnu initialement), il retirera au moment t le bénéfice

$$\max\left(E\left(u\left(C+X\right) \mid S_t\right), E\left(u\left(C+Y\right) \mid S_t\right)\right)$$

Ce bénéfice futur est toutefois incertain (puisque le niveau d'information S_t l'est), de sorte que la valeur initiale de ce bénéfice escompté est

$$E\left(\max\left(E\left(u\left(C+X\right) \mid S_t\right), E\left(u\left(C+Y\right) \mid S_t\right)\right) \mid S_0 = s_0\right) \tag{16}$$

Avec le même raisonnement qui conduit à l'inéquation (14) et sous réserve que l'information disponible à l'instant t soit au moins aussi complète que celle connue initialement[16], on a (15)$\leq$(16), et cela sans supposer quoi que ce soit sur l'aversion au risque du décideur. Acquérir de l'information pour décider avec un niveau d'information S_t plus riche que le niveau initial S_0 présente donc une valeur égale à (16) - (15).[17]

1.5.2 La notion de valeur d'option

Par analogie avec la finance, une branche du calcul économique s'est développée ces dernières années autour de ce que l'on appelle les options réelles. En finance, une option est un contrat qui permet à son détenteur d'acheter ou de vendre une certaine quantité d'un bien ou d'un actif à un cours convenu à l'avance et à (jusqu'à) une date fixée. Une option est donc pour son

---

[14] On a $X \leq \max\left(X,Y\right)$ et $Y \leq \max\left(X,Y\right)$. L'espérance étant une fonction croissante, on a donc $E\left(X\right) \leq E\left(\max\left(X,Y\right)\right)$ et $E\left(Y\right) \leq E\left(\max\left(X,Y\right)\right)$, ce qui permet de conclure.

[15] On réintroduit ici la fonction d'utilité et le niveau de richesse de l'individu pour bien montrer que le raisonnement découle en fait directement du choix de représenter les préférences des individus par un modèle d'espérance d'utilité.

[16] En pratique, cette hypothèse permet d'utiliser la propriété des espérances conditionnelles emboîtées $E\left(E\left(. \mid S_t\right) \mid S_0 = s_0\right) = E\left(. \mid S_0 = s_0\right)$.

[17] Acquérir de l'information présente souvent un coût, parfois non négligeable, comme le montrent par exemple les travaux de prospection pétrolière pour déterminer la valeur potentielle d'un champ pétrolifère. Ce coût est implicitement pris en compte ici dans l'investissement initial demandé par les projets X et Y.

détenteur une forme de couverture du risque puisqu'elle transforme un flux futur incertain en flux certain. La prime d'option est le prix demandé par le vendeur de l'option en contrepartie du contrat de couverture. On montre que, en l'absence d'opportunités d'arbitrage[18], le prix de l'option est égal à la valeur actuelle du risque à l'échéance.

Les options réelles reposent sur les mêmes concepts (bien que les hypothèses relatives aux marchés financiers ne soient pas rigoureusement vérifiées : liquidité, absence d'arbitrage, réplicabilité de l'actif que l'on souhaite couvrir). Par exemple, engager aujourd'hui les études préliminaires et les procédures de réservation foncière pour avoir la possibilité de construire, à horizon de 20 ans si cela s'avère nécessaire, une nouvelle infrastructure de transport est une option réelle. Le coût initial des études et de la réservation foncière est à comparer à la prime du risque que l'on ne puisse pas construire l'infrastructure ultérieurement, ou plutôt qu'on la construise avec d'importants surcoût de réalisation dus à l'insuffisance d'études ou au développement de l'urbanisation.

Pour fixer les idées, considérons un investissement de coût estimé K que l'on souhaite réaliser à une date future T. Le coût réel de cet investissement, à une date t quelconque, dépend de facteurs économiques non maîtrisés et non prévisibles avec certitude, telle par exemple l'évolution des coûts du foncier. Le prix réel à payer le jour où l'on décidera de réaliser l'investissement est donc une variable aléatoire X_t. Si le prix des terrains s'accroît rapidement, il est possible que X_t dépasse le montant prévisionnel K et que cela compromette la rentabilité du projet. A l'inverse, si le prix du foncier s'effondre, l'investisseur pourra réaliser son projet pour un coût réel inférieur à son estimation initiale. Un investisseur averse au risque peut donc chercher à se prémunir contre la possibilité que le coût réel à terme dépasse son estimation initiale ($X_T \geq K$), en prenant une option lui garantissant qu'il paiera au maximum K. La valeur V_t de cette option à la date $t < T$ est égale à l'espérance actuelle du surcoût qui pourrait éventuellement se manifester à la date T, soit[19]

$$V_t = E\left(e^{-\alpha(T-t))}\max\left(X_T - K, 0\right)\right) \tag{17}$$

Afin d'être assuré de réaliser l'investissement à la date T pour un coût au plus égal à K, l'investisseur serait prêt à payer au plus V_t. Si le coût actuel d'acquisition des terrains est inférieur à cette valeur, l'investisseur aurait donc intérêt à les acheter tout de suite (prendre l'option) afin de se prémunir contre la hausse future probable des prix du foncier. C'est peu ou prou le principe des procédures de réservation foncière mises en œuvre pour de futures infrastructures publiques : le coût de ces mesures reste faible par rapport aux coûts futurs qui suviendraient en cas de forte inflation du coût des terrains (ex : urbanisation rapide en périphérie d'agglomération). Par extension, toute stratégie dont le coût est inférieur à la prime d'option

---

[18] C'est-à-dire qu'il n'existe sur le marché aucune stratégie permettant de gagner de l'argent à coup sûr à partir d'un coût d'investissement nul. Cette hypothèse théorique est généralement vérifiée si le marché est très liquide et s'il n'existe aucun coût de transaction, ni aucune contrainte sur les quantités ou sur les ventes à découvert. L'absence d'arbitrage implique que le vendeur du contrat d'option ne peut placer la prime d'option de manière à gagner à coup sûr à l'échéance du contrat. Sa propre stratégie pour faire fructifier la prime d'option en minimisant son espérance de perte est ainsi de suivre en permanence la valeur actuelle du risque à l'échéance.

[19] Si l'on suppose que X_t est un mouvement brownien géométrique (*i.e.* $dX_t = rX_t dt + \sigma X_t dB_t$ ou encore $X_t = X_0 e^{rt - \frac{\sigma^2}{2}t + \sigma B_t}$), on reconnaîtra dans cette formule le problème de Black et Scholes pour un Call financier.

théorique et procurant la même ``assurance'' contre le risque futur sera avantageuse pour le décideur et présentera une valeur nette égale à la prime d'option minorée du coût de ladite stratégie.

1.5.3 Allocation des ressources sous contrainte budgétaire

En présence d'incertitude, le choix des projets d'investissement est délicat : faut-il investir dans un projet qui, en cas de scénario défavorable, s'avèrerait un échec et consommerait en pure perte des ressources qui auraient pu servir à d'autres projets ? Lorsque le projet est marginal par rapport aux ressources disponibles, il n'y a pas vraiment de problème : quel que soit le succès du projet, les ressources mobilisées sont négligeables et n'entament pas la capacité de financement pour les autres projets. Une infrastructure de transport coûtant près d'un milliard d'euros peut sembler marginale à l'échelle du budget de l'Etat (de l'ordre de 350 Md€) mais ne l'est pas en pratique, du fait d'un certain cloisonnement budgétaire : les crédits alloués par l'Etat à l'investissement en infrastructure de transport représentent entre 2 et 2,5 Md€ par an (budget de l'AFITF). Le choix entre plusieurs projets risqués en présence d'une contrainte budgétaire, elle-même incertaine (le niveau des ressources fiscales varie avec le PIB), est donc un problème.

Considérons deux projets coûtant respectivement I_1 et I_2, et engendrant des revenus A_1 et A_2, soit des bénéfices respectifs $B_1 = A_1 - I_1$ et $B_2 = A_2 - I_2$. On suppose que toutes ces variables sont aléatoires. Il existe par ailleurs une enveloppe budgétaire D, elle aussi aléatoire, qui dimensionne les ressources disponibles pour financer les quantités x_1 et x_2 des deux projets[20]. L'objectif du décideur public est de maximiser l'espérance d'utilité tenant compte des projets tout en veillant à ce que leur coût ne dépasse pas l'enveloppe budgétaire disponible :

$$\max_{x_1, x_2} E\left(u\left(C + x_1 B_1 + x_2 B_2\right)\right) \text{ sous la contrainte } x_1 I_1 + x_2 I_2 \leq D$$

où C est la richesse collective (les projets sont supposés marginaux par rapport à cette richesse).

Il s'agit d'un problème d'optimisation stochastique sous contrainte. La contrainte est ici mal définie puisqu'on ne dit pas si elle doit être vérifiée dans tous les cas de figure possibles, dans la plupart des cas (contrainte en probabilité $P\left(x_1 I_1 + x_2 I_2 > D\right) \leq \varepsilon$) ou simplement en espérance ($E\left(x_1 I_1 + x_2 I_2\right) \leq E(D)$). Andrieu ([1]) dresse une liste des formes mathématiques possibles pour cette contrainte et montre les difficultés de résolution inhérentes à ce type de problème. Pour simplifier, et par similitude avec l'approche en univers certain qui conduirait à optimiser le lagrangien du problème, on suppose ici que la contrainte est intégrée à la fonction d'utilité avec un facteur de pondération λ :

$$\max_{x_1, x_2} E\left[u\left(C + x_1 B_1 + x_2 B_2 + \lambda\left(D - x_1 I_1 - x_2 I_2\right)\right)\right]$$

Autrement dit, on suppose que le respect de la contrainte budgétaire est un objectif placé sur le même plan que la maximisation des bénéfices tirés des deux projets, mais que cet objectif est affecté d'un poids λ par rapport à l'objectif principal (*a priori* $\lambda < 1$).

[20] *A priori*, x_1 et x_2 valent 0 ou 1 sauf si l'on s'autorise à réaliser plusieurs projets du même type (x_1 et x_2 entiers naturels) ou s'il est possible de fractionner la réalisation des projets (x_1 et x_2 réels positifs).

Proposition 8 (critère de sélection des projets)

Si la collectivité est confrontée à un ensemble de projets risqués, dont la somme reste marginale par rapport à la richesse collective, alors le bénéfice net par euro investi (corrigé pour le risque systématique) est un critère valable de sélection des projets.

Justification de la proposition 8

Sous réserve d'hypothèses standards sur la fonction d'utilité u (continuité, différentiabilité) et sur l'espace d'optimisation (convexité), les dérivées partielles de la fonction objectif s'écrivent :

$$\frac{\partial E[u(...)]}{\partial x_1} = E[u'(C + x_1 B_1 + x_2 B_2 + \lambda(D - x_1 I_1 - x_2 I_2)).(B_1 - \lambda I_1)]$$

$$\frac{\partial E[u(...)]}{\partial x_2} = E[u'(C + x_1 B_1 + x_2 B_2 + \lambda(D - x_1 I_1 - x_2 I_2)).(B_2 - \lambda I_2)]$$

Si C est suffisamment grand, on peut faire l'approximation $u'(C + x_1 B_1 + x_2 B_2 + \lambda(D - x_1 I_1 - x_2 I_2)) \simeq u'(C)$.
Il suit alors les égalités approchées :

$$\frac{1}{E(u'(C))}\frac{\partial E[u(...)]}{\partial x_1} \simeq \frac{E[u'(C).(B_1 - \lambda I_1)]}{E(u'(C))} = E(B_1 - \lambda I_1) + \frac{\operatorname{cov}(u'(C), B_1 - \lambda I_1)}{E(u'(C))}$$

$$\simeq \left(E(B_1) - \frac{\gamma}{C}\operatorname{cov}(B_1, C) \right) - \lambda \left(E(I_1) - \frac{\gamma}{C}\operatorname{cov}(I_1, C) \right)$$

$$\frac{1}{E(u'(C))}\frac{\partial E[u(...)]}{\partial x_2} \simeq \left(E(B_2) - \frac{\gamma}{C}\operatorname{cov}(B_2, C) \right) - \lambda \left(E(I_2) - \frac{\gamma}{C}\operatorname{cov}(I_2, C) \right)$$

En signalant par une astérisque les équivalents certains au premier ordre des grandeurs utilisées (*i.e.* $B_1^* = E(B_1) - \frac{\gamma}{C}\operatorname{cov}(B_1, C)$, etc.), les dérivées de la fonction objectif au premier ordre sont donc positives si

$$B_1^* - \lambda I_1^* \geq 0 \text{ et } B_2^* - \lambda I_2^* \geq 0$$

Les dérivées positives signalent les projets dans lesquels il est optimal d'investir car leur réalisation apporte un surcroît de bien-être, à la différence des dérivées négatives qui signalent les projets dans lesquels il ne faut pas investir (NB : dans un espace d'optimisation à variables continues, il faudrait investir dans les projets qui améliorent l'espérance de bien-être jusqu'à ce que les dérivées correspondantes s'annulent). Autrement dit, cela signifie que les projets intéressants pour la collectivité vérifient $B_i^* / I_i^* \geq \lambda$: le bénéfice net par euro investi est supérieur au coefficient de la contrainte budgétaire (0,3 pour la France, cf. [5]).

□

La proposition 8 fournit un critère de sélection des projets, mais pas un critère de hiérachisation des projets les uns par rapport aux autres. En effet, les projets sont d'autant plus intéressants pour la collectivité que leur contribution marginale à l'espérance de bien-être collectif est grande, c'est-à-dire que la dérivée correspondante est élevée ($B_i^* - \lambda I_i^*$ grand). Lorsque les projets ont le même coût, cela signifie qu'on peut les classer par ordre de B_i^* / I_i^* décroissant, mais cette règle n'est plus valable si les coûts d'investissement sont différents, comme le montre le tableau suivant.

hypothèse : $\lambda = 0{,}3$	*I*	*B*	*B/I*	*B* - λ*I*
Projet 1	10	30	3	27
Projet 2	20	40	2	34

Par ailleurs, la proposition 8 n'est valable que pour des projets marginaux et dont la somme est marginale par rapport au PIB national. Dans le cas contraire, l'utilité marginale supplémentaire apportée par les projets ne peut pas être approximée comme nous l'avons fait dans les calculs de justification de la proposition. Ne serait-ce qu'en améliorant l'approximation au premier ordre, on voit que les calculs deviennent nettement plus complexes. Ils imposent en particulier de tenir compte de primes de risques additionnelles sur les projets envisagés. Ces primes additionnelles à la prime de risque systématique (c'est-à-dire additionnelles à $\frac{\gamma}{C}\mathrm{cov}(...,C)$) sont de deux natures :

- d'une part, une prime de risque tenant compte de la corrélation entre le projet et le montant de l'enveloppe budgétaire disponible ; en effet, un projet couronné de succès lorsque les ressources sont réduites par ailleurs est préférable à un projet qui imposerait la double sanction d'échouer à générer des bénéfices et d'évincer les autres projets ;
- d'autre part, des primes de risques tenant compte des corrélations deux à deux entre les projets, ces primes traduisant le principe que, à budget donné, il est toujours préférable de diversifier son portefeuille d'actifs.

2 Un modèle décisionnel plus réaliste

Une autre classe de modèles que le modèle d'espérance d'utilité repose sur une formulation plus souple qui introduit, outre la fonction d'utilité u, une fonction φ représentant les croyances de l'individu. Les observations montrent en effet que les individus tendent, d'une part, à surestimer les probabilités des événements rares et, d'autre part, à surestimer les probabilités des événements négatifs par rapport aux probabilités des événements positifs. Les croyances viennent ainsi modifier la perception de la loi de probabilité et tout se passe comme si, au lieu de raisonner avec une loi de probabilité $P(X \leq x)$, les individus raisonnaient avec une loi déformée[21] $\varphi(P(X \leq x)) = \varphi \circ F_X$, où $\circ$ désigne l'opérateur mathématique de la composition de deux fonctions. Le modèle d'espérance d'utilité est ainsi remplacé par le modèle d'espérance déformée de l'utilité[22], où l'on notera DE le nouvel opérateur (non linéaire !)

$$\max_X DE(u(X)) = \max_X \int u(x)d(\varphi(P)) \tag{19}$$

[21]Pour que cette fonction soit bien une distribution de probabilité, il faut imposer que φ est une fonction croissante de $[0,1]$ dans $[0,1]$ et vérifie $\varphi(0)=0$ et $\varphi(1)=1$.

[22]Lorsque X est à valeurs réelles, le modèle présenté ici est connu dans la littérature scientifique sous le nom de ``modèle d'espérance d'utilité dépendante du rang'', en raison du fait que la fonction φ modifie les probabilités selon le rang respectif des différentes valeurs possibles (plus précisément selon la valeur de la fonction de répartition) de la variable aléatoire X. Si les valeurs possibles de X se répartissent dans un intervalle $[a;b]$, la déformation des probabilités d'occurrence de chaque valeur va dépendre de la place de cette valeur par rapport aux autres valeurs possibles de l'intervalle : $P(X=a)$ deviendra $\varphi'(F_X(a)).P(X=a) = \varphi'(0).P(X=a)$, $P(X=b)$ deviendra $\varphi'(F_X(b)).P(X=b) = \varphi'(1).P(X=b)$ et plus généralement $P(X=x, a \leq x \leq b)$ deviendra $\varphi'(F_X(x)).P(X=x)$. Cette classe de modèles est en réalité une branche particulière des modèles fondés sur la théorie des capacités (voir [2]). Dans ces modèles, la mesure de probabilité dP est remplacée par une mesure de capacité dv, la capacité étant une fonction d'ensembles possédant moins de propriétés qu'une probabilité (notamment, elle perd l'additivité). Les fonctions de la forme $\varphi(P)$ sont des cas particuliers de capacités.

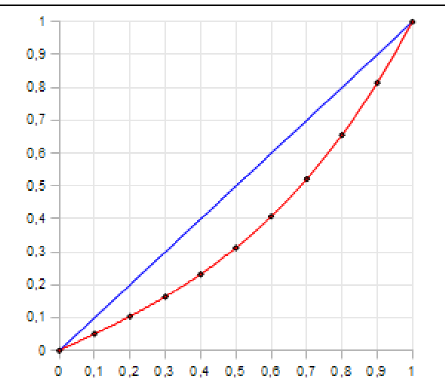
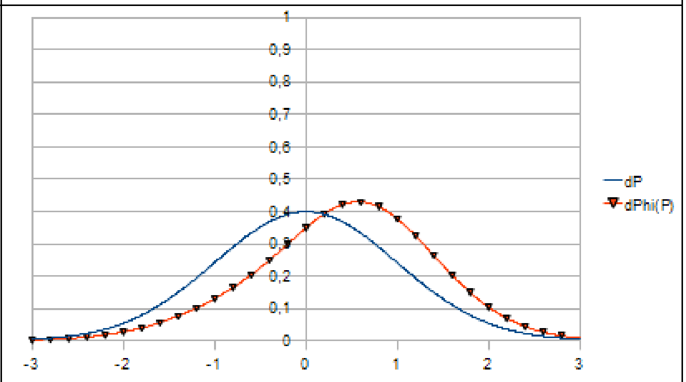
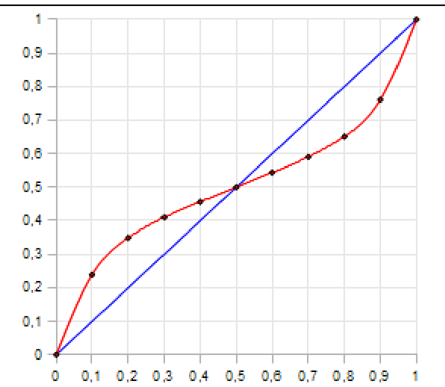
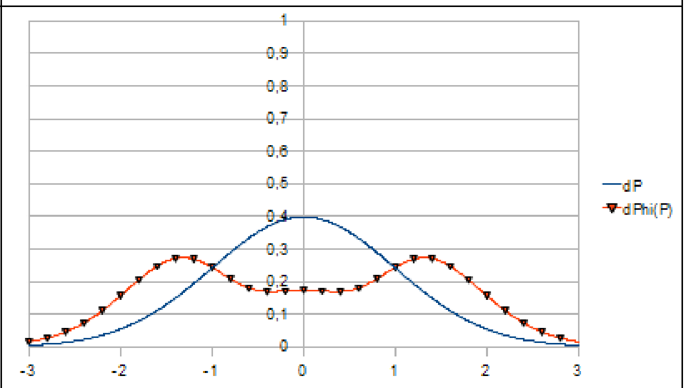
Par la suite, on notera p_X la densité de probabilité de la variable aléatoire X (par définition, $p_X(x)dx = P(x \leq X < x + dx) = F_X'(x)dx$) et l'on supposera que la fonction $\varphi(F_X)$ est suffisamment dérivable (et ses dérivées intégrables au sens des distributions). En utilisant le fait que $d\varphi(P) = \varphi'(P)dP$ (ou de manière équivalente $d(\varphi \circ F_X) = \varphi' \circ F_X . dF_X$), le modèle d'espérance déformée de l'utilité (modèle DEU) peut se réécrire ainsi

$$\max_X DE(u(X)) = \max_X \int u(x).\varphi' \circ F_X(x)dP = \max_X E(u(X).\varphi' \circ F_X(X))$$

On constate qu'il s'agit d'un modèle d'espérance d'utilité dans lequel l'utilité est modulée par un facteur dépendant des croyances du décideur au sujet de la loi de probabilité sous-jacente. C'est cette dépendance vis-à-vis de la loi de probabilité elle-même qui rend le modèle difficilement utilisable pour mener les mêmes raisonnements qu'avec le modèle d'espérance d'utilité.

2.1 L'impact des croyances du décideur sur la déformation des probabilités

Les graphiques suivants illustrent comment les croyances de l'individu, représentées par la fonction φ, peuvent modifier la distribution de probabilité utilisée pour apprécier le niveau de risque. Ici, la distribution initiale est une loi normale centrée d'écart-type égal à 1.

	Représentation de la fonction φ	Impact de φ sur la densité de probabilité
Cas d'une fonction convexe		
Cas d'une fonction à symétrie centrale autour de (1/2,1/2)		

Lorsque la fonction φ est sous la première diagonale (cas d'une fonction convexe), les probabilités sont déformées vers les valeurs positives de X : l'individu accorde plus de poids aux valeurs les plus grandes. A l'inverse, on observerait que lorsque la fonction φ est au dessus de la première diagonale (cas d'une fonction concave), les probabilités sont déformées vers les valeurs négatives : l'individu accorde plus de poids aux valeurs les plus petites.

Lorsque la fonction φ passe alternativement au dessus et en dessous de la première diagonale (cas d'une fonction à symétrie centrale dans le premier carré), les probabilités sont déformées tant vers les valeurs positives que vers les valeurs négatives. Dans notre exemple, l'individu accorde plus de poids aux valeurs extrêmales et les queues de distribution sont épaissies, mais on aurait pu également représenter l'exemple inverse dans lequel l'individu accorde plus de poids aux valeurs centrales et les queues de distribution sont écrasées.

2.2 De la difficulté de mener les calculs formels avec ce nouveau modèle

Le modèle d'espérance déformée de l'utilité est, sauf exception, non linéaire[23]. Pour comprendre cela, considérons le cas de la variable aléatoire $-X$, c'est-à-dire une loterie de même loi de probabilité que la loterie X mais de gain opposé. Sa fonction de répartition de probabilité vérifie $F_{-X}(x) = P(-X \le x) = P(X \ge -x) = 1 - F_X(-x)$, de sorte que $d(F_{-X}(x)) = (dF_X)(-x)$. Si l'opérateur d'espérance est bien linéaire [24], l'opérateur d'espérance déformée DE ne l'est pas *a priori*.

$$DE(-X) = E(-X.\varphi' \circ F_{-X}(-X)) = -E(X.\varphi'(1 - F_X(X))) \neq -E(X.\varphi' \circ F_X(X))$$

Dès que la fonction φ' n'est pas symétrique par rapport à 1/2 (cas où l'on aurait $\forall x \in [0,1], \varphi'(1-x) = \varphi'(x)$), la dernière égalité n'est pas vérifiée : pour un individu se comportant suivant ce modèle, une loterie négative n'est pas équivalente à l'opposé d'une loterie positive.

Considérons maintenant la possibilité d'ajouter deux loteries X et Y.

$$DE(X+Y) = E((X+Y).\varphi' \circ F_{X+Y}(X+Y))$$

La fonction de répartition d'une somme de variables aléatoires est le produit de convolution de la fonction de répartition de l'une quelconque d'entre elles par la fonction de densité de l'autre

$$F_{X+Y}(z) = \int_{w=-\infty}^{z} \int_{v} p_X(v) p_Y(w-v) dv dw = \int p_X(v) F_Y(z-v) dv = p_X \star F_Y(z) = F_X \star p_Y(z)$$

Cette observation nous conduit à deux formules que nous utiliserons par la suite, l'une sous forme d'espérance, l'autre dans le cas où l'une des variables est en réalité une constante (c'est-à-dire affectée d'une probabilité de type fonction de Dirac ($Y = a \Leftrightarrow \forall z, p_Y(z) = \delta_a(z)$)

$$F_X \star p_Y(z) = \int F_X(z-v) p_Y(v) dv = E(F_X(z-Y)) \tag{20}$$

$$F_X \star \delta_a(z) = \int F_X(z-v) \delta_a(v) dv = F_X(z-a) \tag{21}$$

[23]Si φ est la fonction identité, il est clair que le modèle est linéaire.

[24]On a en effet $E(-X) = \int -x d(F_{-X}) = \int -x(dF_X)(-x) = -\int y(dF_X)(y) = -E(X)$ en utilisant le changement de variable $y = -x$ (l'ordre des bornes d'intégration est interverti par ce changement de variables).

Avec ces éléments d'algèbre, il est possible de mener quelques calculs simples permettant de comparer le modèle d'espérance déformée de l'utilité avec le modèle standard d'espérance d'utilité (modèle VNM).

2.3 Approximation au premier ordre de l'équivalent certain

Proposition 9 (développement du modèle DEU au 1^er^ ordre)

Sous réserve des hypothèses *ad hoc*, l'équivalent certain au premier ordre en X pour le modèle DEU s'écrit

$$R \simeq E(X) - \left(\gamma - \phi\left(2 + \frac{\phi'}{\varepsilon_u}\right)\right)\frac{\operatorname{cov}(X,C)}{\overline{C}} \tag{22}$$

avec $\gamma = -\overline{C}.u''/u'$ (l'indice d'aversion relative au risque), $\phi = \overline{C}.p_C.\varphi''(F_C)/\varphi'(F_C)$ qui est une mesure de l'élasticité des croyances par rapport au niveau de richesse, $\varepsilon_u = \overline{C}.u'/u$ qui est l'élasticité de la fonction d'utilité et enfin $\phi' = \overline{C}.(p_C.\varphi'')'/(p_C.\varphi'')$ qui est l'élasticité de la variation des croyances par rapport au niveau de richesse.

Justification de la proposition 9

Comme précédemment, l'équivalent certain R de la loterie de gain aléatoire X est défini par $DE(u(C+X)) = DE(u(C+R))$. On suppose X et R suffisamment petits et l'on développe au premier ordre en laissant de côté à chaque étape les termes d'ordre supérieur ou égal à 2

$$\begin{aligned} DE(u(C+X)) &= E(u(C+X).\varphi' \circ F_{C+X}(C+X)) \\ &\simeq E((u(C) + X.u'(C)).(\varphi' \circ F_{C+X}(C) + X.p_{C+X}(C).\varphi'' \circ F_{C+X}(C))) \\ &\simeq E(u(C).\varphi' \circ F_{C+X}(C) + X.u'(C).\varphi' \circ F_{C+X}(C) + X.u(C).p_{C+X}(C).\varphi'' \circ F_{C+X}(C)) \end{aligned}$$

En utilisant l'égalité (20) pour X petit devant z, on a $F_{C+X}(z) = E(F_C(z-X)) \simeq E(F_C(z) - X.F_C{}'(z)) = F_C(z) - E(X).p_C(z)$ et, de même, $p_{C+X}(z) = \int p_C(z-v)p_X(v)dv = E(p_C(z-X)) \simeq p_C(z)$, de sorte que[25]

$$\begin{aligned} DE(u(C+X)) &\simeq E(u.\varphi' \circ F_C - E(X).u.p_C.\varphi'' \circ F_C + X.(u'.\varphi' \circ F_C + u.p_C.\varphi'' \circ F_C)) \\ &\simeq E(u.\varphi' \circ F_C) + E(X).E(u'.\varphi' \circ F_C) + \operatorname{cov}(X, u'.\varphi' \circ F_C + u.p_C.\varphi'' \circ F_C) \end{aligned} \tag{23}$$

Par le même raisonnement et en utilisant l'égalité (21), le développement pour l'équivalent certain R donne une formule similaire

$$DE(u(C+R)) \simeq E(u.\varphi' \circ F_C) + R.E(u'.\varphi' \circ F_C)$$

En égalisant les deux termes, on obtient une approximation de l'équivalent certain au premier ordre :

$$R \simeq E(X) + \frac{\operatorname{cov}(X, u'.\varphi' \circ F_C + u.p_C.\varphi'' \circ F_C)}{E(u'.\varphi' \circ F_C)} \tag{24}$$

Si l'on suppose que la richesse C varie peu par rapport à son espérance $E(C) = \overline{C}$, on peut faire les approximations suivantes[26]

$$u'(C).\varphi' \circ F_C(C) \simeq u'.\varphi' \circ F_C + (C - \overline{C}).(u'.\varphi' \circ F_C)'$$

[25] Pour alléger les notations, on omet la dépendance de toutes les fonctions par rapport au niveau de richesse C.

[26] Pour alléger les notations, on omet la dépendance de toutes les fonctions par rapport à $\overline{C}$.

$$u(C).p_C(C).\varphi''\circ F_C(C)\simeq u.p_C.\varphi''\circ F_C+\left(C-\overline{C}\right).\left(u.p_C.\varphi''\circ F_C\right)'$$

L'équation (24) devient

$$R\simeq E(X)+\frac{\left(u'.\varphi'\circ F_C+u.p_C.\varphi''\circ F_C\right)'\left(\overline{C}\right)}{\left(u'.\varphi'\circ F_C\right)\left(\overline{C}\right)}\operatorname{cov}(X,C)$$

formule qui se réécrit comme l'équation (22) en posant les diverses notations indiquées dans la proposition 8.

□

L'approximation de R présente une forme assez similaire à celle issue du modèle d'espérance d'utilité, à savoir un terme d'espérance du gain et un terme exprimant la corrélation de ce gain avec l'utilité de la richesse (ou plutôt les utilités nominale et marginale perçues par l'individu). Formellement, seul le coefficient d'aversion au risque s'en trouve modifié. Tout se passe comme si l'aversion au risque γ était minorée d'un terme tenant compte des croyances de l'individu (et plus particulièrement de leur élasticité ϕ au niveau de richesse). Si les croyances, ou l'appréhension de l'individu, sont totalement indépendantes du niveau de richesse ($\phi=0$), la prime de risque dépend uniquement de l'aversion au risque. Si l'appréhension diminue avec le niveau de richesse (tendance à l'optimisme, $\phi>0$), la prime de risque se trouve réduite (et *vice versa* si l'appréhension augmente avec le niveau de richesse).

2.4 Vers un nouveau taux d'actualisation ?

Si l'on reprend le problème de l'utilité intertemporelle d'un projet engendrant une séquence temporelle de flux économiques $X_0, X_1, ..., X_t, ...$ à chaque période, l'équation (10) devient, sous certaines hypothèses de séparabilité temporelle des lois de probabilité des C_t et des X_t que l'on ne détaillera pas ici :

$$DE\left(\sum_{t\geq 0} e^{-\delta t}u(C_t+X_t)\right)=\sum_{t\geq 0} e^{-\delta t}E\left(u(C_t+X_t).\varphi'\circ F_{C_t+X_t}(C_t+X_t)\right)$$

En utilisant le développement de l'équation (23), on observe que le taux d'actualisation à prendre en compte dans la VAN évolue non plus comme l'espérance de l'utilité marginale de la richesse mais comme $E\left(u'(C_t).\varphi'\circ F_{C_t}(C_t)\right)$ et qu'il doit être défini par

$$\alpha=\delta-\frac{1}{t}\ln\left(\frac{E\left(u'(C_t).\varphi'\circ F_{C_t}(C_t)\right)}{E\left(u'(C_0).\varphi'\circ F_{C_0}(C_0)\right)}\right)$$

La dépendance en temps du facteur $E\left(u'(C_t).\varphi'\circ F_{C_t}(C_t)\right)$ est délicate à évaluer et fait apparaître des termes additionnels dans la formule du taux d'actualisation.

Proposition 10 (forme possible du taux d'actualisation dans le modèle DEU)

Si la richesse C_t est un mouvement brownien géométrique $C_t = C_0 e^{\mu t + \sigma B_t}$, si la fonction d'utilité u est CRRA de paramètre γ et si la fonction de croyance φ est une fonction puissance de la forme[27] $\varphi(x) = x^{\phi+1}$ (avec $-1 < \phi$), alors le taux d'actualisation est de la forme

$$\alpha_t \simeq \delta + \gamma\mu - \frac{\gamma^2\sigma^2}{2}\lambda^2 + \gamma\sigma m \frac{1}{\sqrt{t}} \tag{25}$$

Justification de la proposition 10

Il s'agit d'étudier la dépendance en temps de la fonction $f(t) = E\left(u'(C_t).\varphi' \circ F_{C_t}(C_t)\right)$. Commençons par remarquer que la variable aléatoire $U_t = B_t / \sqrt{t}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$ de densité de probabilité $\mathcal{N}'(v) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{v^2}{2}}$. On a alors $u'(C_t) = C_0^{-\gamma} e^{-\gamma\mu t - \gamma\sigma B_t}$ et $F_{C_t}(C_t) = \mathcal{N}\left(B_t / \sqrt{t}\right)$. Plutôt que d'utiliser le lemme d'Itô pour estimer la dérivée $\frac{df}{dt}(t)$, il est plus aisé de dériver directement l'expression intégrale de la fonction f

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} C_0^{-\gamma} e^{-\gamma\mu t - \gamma\sigma\sqrt{t}\, v} \times (\phi+1)(\mathcal{N}(v))^{\phi} \times \mathcal{N}'(v)\, dv$$

On passe ici sur les considérations d'intégrabilité de la dérivée de l'intégrande et, plus généralement, sur le détail des calculs qui font intervenir une intégration par parties, pour aboutir directement au résultat :

$$\frac{df}{dt}(t) = \left(-\gamma\mu + \frac{\gamma^2\sigma^2}{2}\right) f(t) - \frac{\gamma\sigma\phi}{2\sqrt{t}} u'(C_0) e^{-\gamma\mu t} E\left(\frac{\mathcal{N}'(U_t)}{\mathcal{N}(U_t)} e^{-\gamma\sigma\sqrt{t}\, U_t} .\varphi' \circ \mathcal{N}(U_t)\right)$$

Le premier terme du membre de droite conduit au facteur d'actualisation obtenu dans le cas du modèle d'espérance d'utilité (voir (13)) et le second terme corrige ce facteur d'actualisation de l'effet des croyances de l'individu, représentées par la fonction φ. Le terme correctif pose toutefois un sérieux problème dans la mesure où il présente une dépendance en temps, dépendance d'autant plus grande que t est petit : pour des horizons courts, l'impact des croyances du décideur est significatif. On voit ici que si $-1 < \phi < 0$ (tendance au pessimisme), les croyances ont pour effet de réduire le taux d'actualisation calculé par le modèle d'espérance d'utilité.

On peut s'en convaincre en cherchant une solution approchée de l'équation différentielle. L'approximation repose sur l'observation :

$$\forall x, (\phi+1)(\mathcal{N}(x))^{\phi} . \mathcal{N}'(x) \simeq \frac{1}{\lambda} \mathcal{N}'\left(\frac{x-m}{\lambda}\right)$$

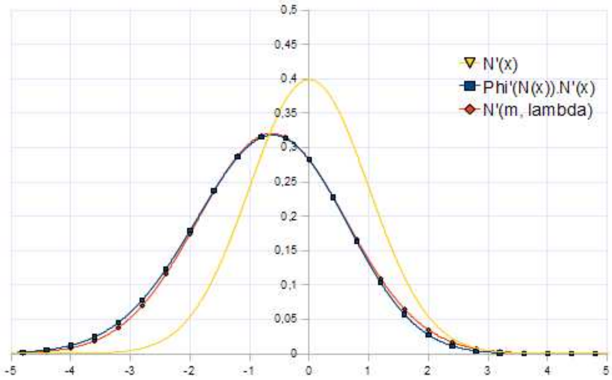
c'est-à-dire que moduler la densité gaussienne $\mathcal{N}'(x)$ par une fonction puissance de la distribution $\mathcal{N}(x)$ revient à peu près à translater cette densité d'un paramètre m et modifier son écart-type d'un paramètre λ. En utilisant le développement limité de $\mathcal{N}(x)$ en 0, ces deux paramètres sont définis par :

$$\lambda \simeq \frac{2^{\phi}(\pi + 2\phi)^{\phi+2}}{(\phi+1)(\pi+4\phi)^{\phi}\left((\pi+2\phi)^2 - \pi\phi^2\right)} \quad \text{et} \quad m = sign(\phi)\sqrt{2\lambda^2 \ln\left(\frac{2^{\phi}}{\lambda(\phi+1)}\right)}$$

Numériquement, on vérifie que l'approximation est justifiée pour $-0{,}7 < \phi < 5$. Le schéma suivant illustre l'approximation pour $\phi = -0{,}5$ ($m = -0{,}627$ et $\lambda = 1{,}246$) ; l'erreur quadratique moyenne est inférieure à 0,1%.

---

[27]Pour $\phi = 0$, la fonction φ est la fonction identité : il n'y a pas de transformation des lois de probabilité du fait des croyances du décideur. Pour $\phi > 0$, la fonction φ est convexe : le décideur surpondère les résultats positifs, et pour $-1 < \phi < 0$, la fonction φ est concave : le décideur surpondère les résultats négatifs.

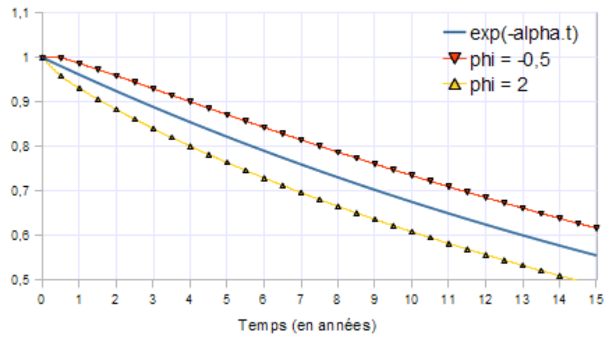
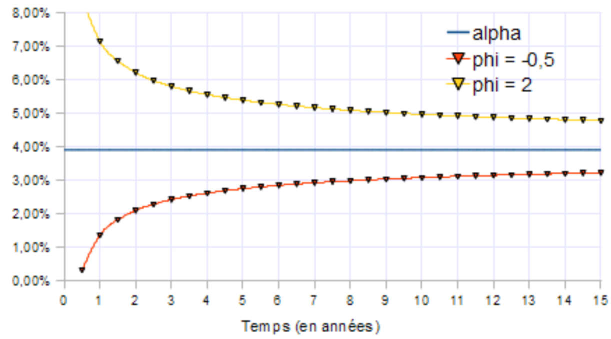


Des calculs un peu longs conduisent alors à l'approximation $f(t) \simeq u'(C_0)e^{-\gamma\mu t+\gamma^2\sigma^2\lambda^2\frac{t}{2}-\gamma\sigma m\sqrt{t}}$, où m et λ sont les deux paramètres dépendants de ϕ définis précédemment. La formule (25) en découle.

□

La formule (25) du taux d'actualisation reste cohérente avec celle dérivée du modèle d'espérance d'utilité, dans la mesure où $\phi = 0$ implique $\lambda = 1$ et $m = 0$ de sorte que l'on retrouve la formule (13) si l'on suppose qu'il n'y a pas de déformation des probabilités du fait des croyances.

Les graphiques suivants illustrent l'impact de la fonction de croyance φ sur le facteur d'actualisation et sur le taux d'actualisation, lorsque φ est de la forme $\varphi(x) = x^{\phi+1}$, avec $\phi = -0{,}5$ (pessimisme), $\phi = 0$ (neutralité, *i.e.* on retrouve le facteur d'actualisation standard) et $\phi = 2$ (optimisme). Pour cette application numérique, on a supposé $\gamma = 2$, $\mu = 2\%$ et $\sigma = 2\%$.

Facteur d'actualisation $e^{-\alpha_t t}$	Taux d'actualisation α_t
	

Lorsque l'individu fait preuve de pessimisme sur l'évolution de son niveau de richesse ($\phi < 0$), tout se passe comme s'il utilisait un taux d'actualisation inférieur au taux théorique défini par le modèle d'espérance d'utilité. Il est ainsi prêt à accepter des placements sans risque avec des taux de rentabilité de l'ordre de 1% à 2% à court terme (1 à 2 ans). S'il est très pessimiste, le taux d'actualisation de court terme peut même devenir négatif (cas non représenté ici). A l'inverse, s'il est optimiste sur l'évolution de son niveau de richesse ($\phi > 0$), il ne s'engagera que dans des projets présentant une forte rentabilité : 6% à 7% à horizon de 1 à 2 ans.

Par ailleurs, à mesure que l'horizon temporel s'éloigne, le taux d'actualisation se rappoche du taux théorique défini par le modèle d'espérance d'utilité. En effet, l'incertitude sur le niveau de richesse à moyen terme amoindrit l'impact des croyances de l'individu sur ses exigences de rentabilité des projets qu'il envisage : qu'il soit optimiste ou pessimiste, son biais de jugement diminue quand l'individu considère le futur lointain. Toutefois, si l'on en juge par la forme de l'équation (25), quand $t \to +\infty$, il subsiste un biais à long terme par rapport au taux d'actualisation classique puisque l'effet précaution est corrigé d'un facteur généralement différent de 1 ($\lambda \neq 1$).

En définitive, le modèle d'espérance déformée de l'utilité pourrait expliquer une partie du problème de l'*equity premium puzzle*, mentionné au 1.4.2.

References

[1] Andrieu Laëtitita (2004). Optimisation sous contrainte en probabilité, Thèse présentée pour l'obtention du titre de Docteur de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.

[2] Choquet, Gustave (1954). Theory of capacities, Annales de l'Institut Fourier, tome 5, pp. 131-295.

[3] Cohen, Michèle et Jean-Marc Tallon (2000). « Décision dans le risque et l'incertain : l'apport des modèles non-additifs », Revue d'Economie Politique, n110 (5), avril 2000, pp. 631-681.

[4] Gollier, Christian (2007). « Comment intégrer le risque dans le calcul économique ? », Revue d'Économie Politique, vol. 117, n2, 2007, pp. 209-223.

[5] Lebègue, Daniel (2005). Révision du taux d'actualisation des investissements publics, Rapport du groupe d'experts présidé par Daniel Lebègue, 21 janvier 2005, Commissariat général du plan, 112 p.

[6] Mehra, Rajnish et Edward C. Prescott (2003). « The Equity Premium Puzzle in Retrospect ». in G.M. Constantinides, M. Harris and R. Stulz, Handbook of the Economics of Finance, Amsterdam : North Holland, pp. 889–938.